





الصف الثالث الإعدادى

إهداء إلى الطالبة



ملزمة الهندسة



إعداد وتصميم



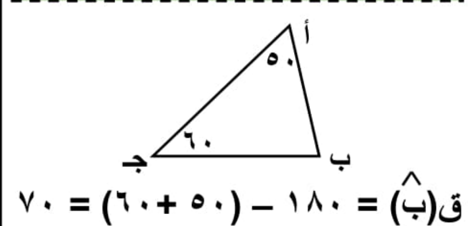
معلم أول رياضيات

استعدوا للمغامرة

أساسيات تراكمية

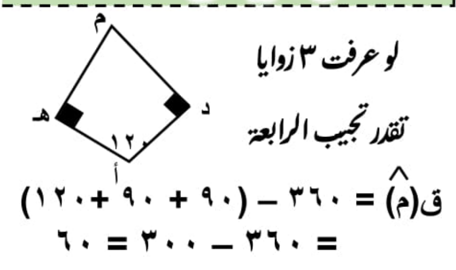


مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠



ق(ب̂) = ١٨٠ – (٥٠ + ٦٠) = ٧٠

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠



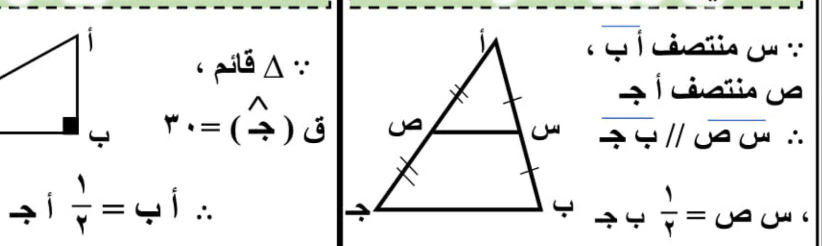
لو عرفت ٣ زوايا تقدر تجيب الرابعة

ق(م̂) = ٣٦٠ – (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠)
= ٣٦٠ – ٣٠٠ = ٦٠

في المثلث المتساوى الساقين زاويتا القاعدة متساويتان

∵ م أ = م ب
∴ ق(أ̂) = ق(ب̂)
∴ ق(ب̂) = ٦٥
، ق(م̂) = ١٨٠ – ١٣٠ = ٥٠

القطعة الواصلة بين منتصفى ضلعين توازى الضلع الثالث

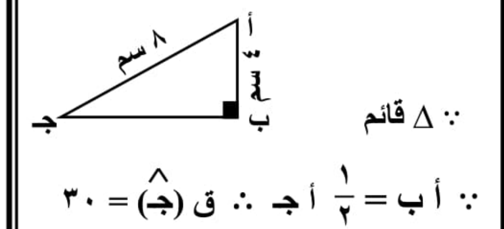


∵ س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ
∴ س ص // ب جـ
، س ص = ½ ب جـ

طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر

∵ Δ قائم ،
ق(جـ̂) = ٣٠
∴ أ ب = ½ أ جـ

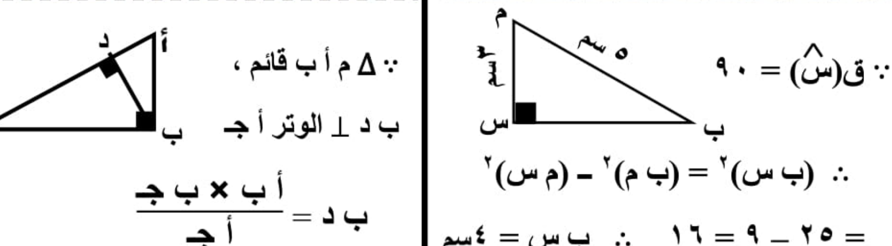
إذا كان طول الضلع = نصف طول الوتر فإن الزاوية المقابلة له = ٣٠



∵ Δ قائم

∵ أ ب = ½ أ جـ ∴ ق(جـ̂) = ٣٠

نظرية فيثاغورث



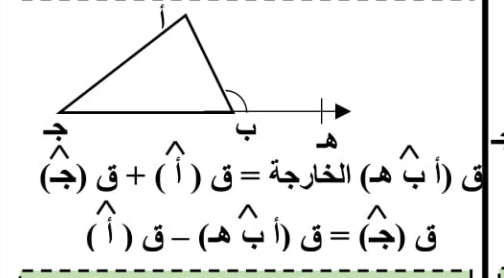
∵ ق(س̂) = ٩٠
∴ (ب س)² = (ب م)² – (م س)²
= ٢٥ – ٩ = ١٦ ∴ ب س = ٤سم

نظرية إقليدس

∵ Δ م أ ب قائم ،
ب د ⊥ الوتر أ جـ

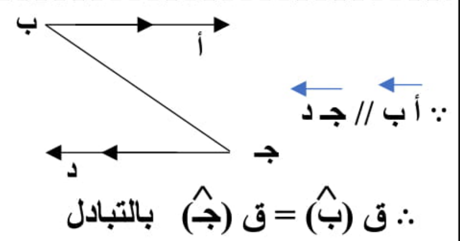
ب د = (أ ب × ب جـ) / أ جـ

قياس الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة



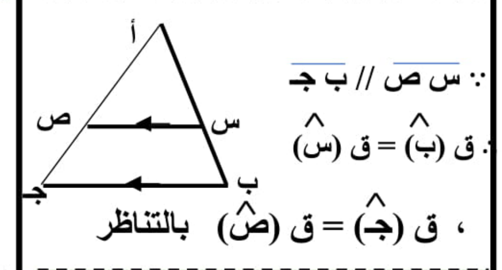
ق(أ ب̂ هـ) الخارجة = ق(أ̂) + ق(جـ̂)
ق(جـ̂) = ق(أ ب̂ هـ) – ق(أ̂)

إذا وجد توازى حرف Z فإن الزاويتان المتبادلتان متساويتان



∵ أ ب // جـ د
∴ ق(ب̂) = ق(جـ̂) بالتبادل

إذا وجد توازى حرف F فإن الزاويتان المتناظرتان متساويتان



∵ س ص // ب جـ
∴ ق(ب̂) = ق(س̂)
، ق(جـ̂) = ق(ص̂) بالتناظر

إذا وجد توازى حرف U فإن الزاويتان المتداخلتان متكاملتان

∵ أ ب // جـ د
∴ ق(ب̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠

لإثبات التوازى

نبحث عن إحدى الحالات الآتية:

- زاويتان متبادلتان متساويتان
- زاويتان متناظرتان متساويتان
- زاويتان متداخلتان متكاملتان

حالات تطابق مثلثين

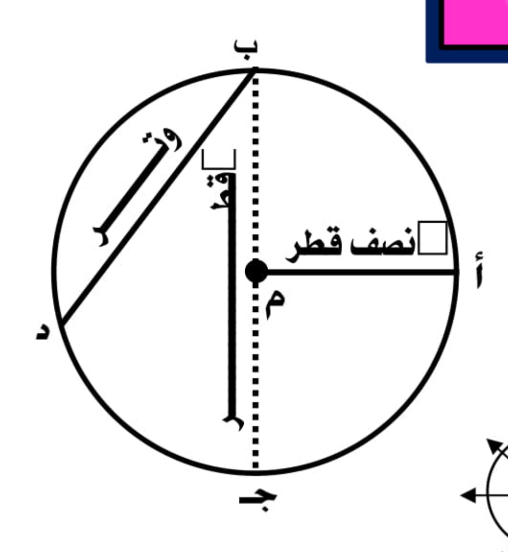
- ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- زاويتان والضلع المرسوم بينهما
- وتر وضلع (في المثلث القائم)

المثلث المتساوى الأضلاع

أضلاعه متساوية في الطول
زواياه متساوية في القياس



مفاهيم أساسية



نصف القطر : هو قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة

الوتر : هو قطعة مستقيمة طرفاها أي نقطتين على الدائرة

القطر : هو وتر مار بمركز الدائرة ، وهو أطول الأوتار طولا

محور التماثل : هو المستقيم المار بمركز الدائرة.

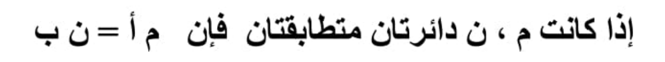
الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التماثل

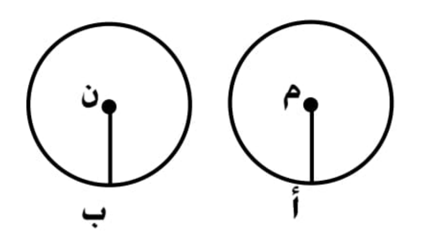
عدد محاور تماثل نصف أو ربع أو ثلث الدائرة محور واحد

الفرق بين الدائرة وسطح الدائرة

الدائرة	سطح الدائرة	ملحوظة مهمة
الخط الأسود المرسوم ده هو الدائرة	هو الخط الأسود + الجزء المظلل	$\overleftrightarrow{أ ب}$ ∩ الدائرة م = { أ ، ب } بينما $\overleftrightarrow{أ ب}$ ∩ سطح الدائرة = $\overline{أ ب}$

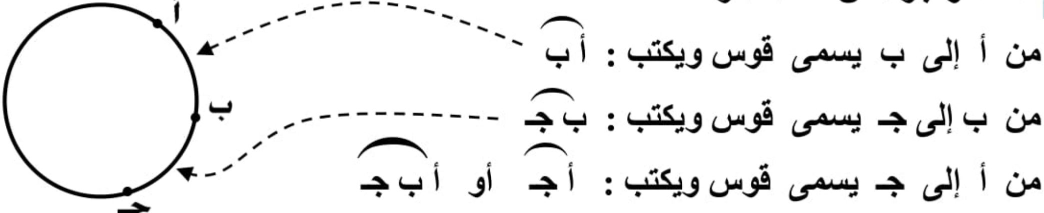
الدائرتان المتطابقتان : هما دائرتان أنصاف أقطارهما متساوية في الطول.





إذا كانت م ، ن دائرتان متطابقتان فإن م أ = ن ب

القوس : هو جزء من خط الدائرة



من أ إلى ب يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{أ ب}$

من ب إلى جـ يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{ب جـ}$

من أ إلى جـ يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{أ جـ}$ أو $\overset{\frown}{أ ب جـ}$

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

محيط الدائرة = ٢ π نق

طول نصف الدائرة = π نق

طول ربع الدائرة = $\frac{١}{٢}$ π نق

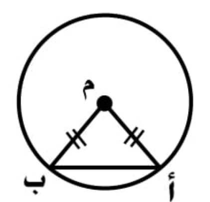
تعليم محمود عوض
معلم أول رياضيات

نتائج هامة





أنصاف الأقطار في الدائرة الواحدة متساوية في الطول



∵ م أ ، م ب أنصاف أقطار

∴ م أ = م ب

أى أن : ق (أ^) = ق (ب^)

مثال ١



أوجد ق (م أ^ ب)

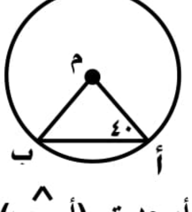
الحل :

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ ق (أ^) = ق (ب^)

$= \frac{١٨٠ - ٨٠}{٢} = ٥٠$

تدريب ١



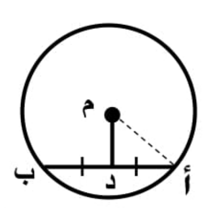
أوجد ق (أ م^ ب)

....

....

....

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

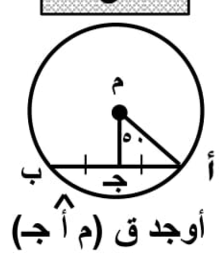


∵ د منتصف الوتر أ ب

∴ م د ⊥ أ ب

∴ ق (م د^ أ) = ٩٠

مثال ٢



أوجد ق (م أ^ جـ)

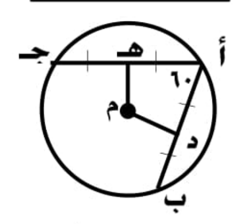
الحل :

∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب

∴ ق (م جـ^ أ) = ٩٠

∴ ق (م أ^ جـ) = ١٨٠ − (٥٠+٩٠) = ٤٠

تدريب ٢



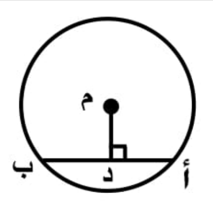
أوجد ق (د م^ هـ)

....

....

....

المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودياً على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر

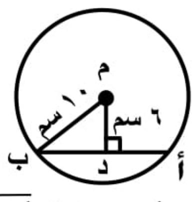


∵ م د ⊥ أ ب

∴ د منتصف أ ب ∴ أ د = د ب

فإذا كان أ ب = ٨سم فإن أ د = ٤سم

مثال ٣



أوجد طول أ د

الحل :

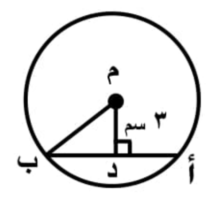
في Δ م د ب من فيثاغورث

د ب = ٨ سم

∵ م د ⊥ أ ب ∴ د منتصف أ ب

∴ أ د = د ب = ٨ سم

تدريب ٣



أب = ٨ سم أوجد م ب

....

....

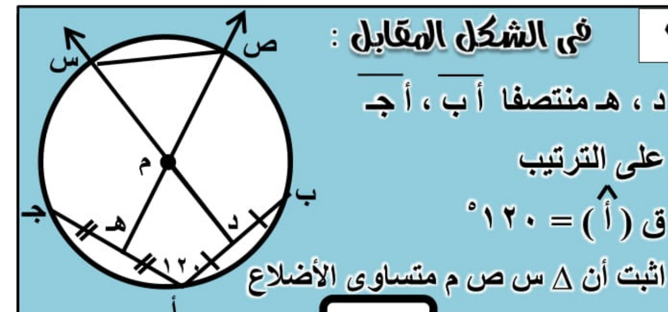
....

١ في الشكل المقابل :

د ، هـ منتصفا أب ، أجـ على الترتيب

ق ($\hat{أ}$) = ١٢٠°

اثبت أن Δ س ص م متساوى الأضلاع



الحل

∵ د منتصف أب ∴ م د ⊥ أ ب

∴ ق (م $\hat{د}$ أ) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ

∴ ق (م $\hat{هـ}$ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق (د $\hat{م}$ هـ) = ٣٦٠ – (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°

∴ ق (ص $\hat{م}$ س) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

∵ م ص = م س (أنصاف أقطار)

∴ ق (م $\hat{ص}$ س) = ق (م $\hat{س}$ ص) = ٦٠°

∴ Δ س ص م متساوى الأضلاع (جميع زواياه ٦٠°)

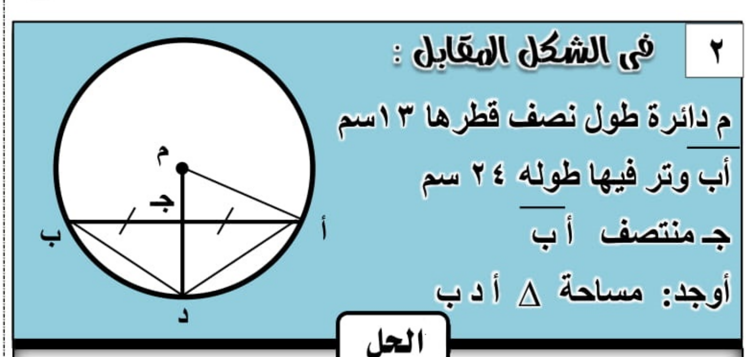
٢ في الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم

أب وتر فيها طوله ٢٤ سم

جـ منتصف أ ب

أوجد: مساحة Δ أ د ب



الحل

∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب ∴ ق (م $\hat{جـ}$ أ) = ٩٠°

∵ أ ب = ٢٤ سم ∴ أ جـ = ١٢ سم

في Δ م جـ أ القائم : بتطبيق فيثاغورث

∴ (م جـ)^2 = (١٣)^2 – (١٢)^2 = ١٦٩ – ١٤٤ = ٢٥

∴ م جـ = ٥ سم ، ∵ م د = ١٣ سم

∴ جـ د = ١٣ – ٥ = ٨ سم

∵ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

∴ مساحة Δ أ د ب = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم^2

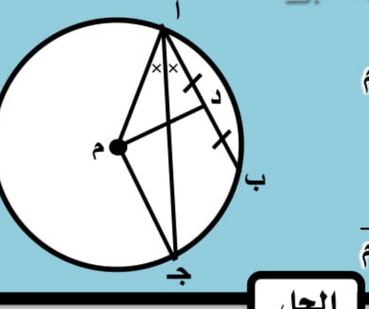
٣ في الشكل المقابل :

أ ب وتر فى الدائرة م

أ جـ ينصف ب $\hat{أ}$ م

د منتصف أ ب

اثبت أن د م ⊥ جـ م



الحل

في Δ أ م جـ : ∵ م أ = م جـ (أنصاف أقطار)

∴ ق (م $\hat{أ}$ جـ) = ق (م $\hat{جـ}$ أ) ⟵ (١)

∵ ق (م $\hat{أ}$ جـ) = ق (ب $\hat{أ}$ جـ) ⟵ (٢) معطى

من ١ ، ٢ ينتج أن:

ق (م $\hat{جـ}$ أ) =ق (ب $\hat{أ}$ جـ) وهما متبادلتان

∴ أ ب // جـ م

، ∵ د منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب

∵ أ ب // جـ م ∴ دم ⊥ جـ م

٤ في الشكل المقابل :

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

ق ($\hat{أ}$) = ٦٠°

ق ($\hat{ب}$) = ٧٠°

أوجد قياسات زوايا Δ م س ص



الحل

ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠ – (٧٠ + ٦٠) = ٥٠°

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب

∵ م ص ⊥ أ جـ ∴ ص منتصف أ جـ

∴ س ص // ب جـ (قطعة واصلة بين منتصفى ضلعين)

∴ ق(أ $\hat{س}$ ص) = ٧٠° ، ق(أ $\hat{ص}$ س) = ٥٠° بالتناظر

∴ ق (م $\hat{س}$ ص) = ٩٠ – ٧٠ = ٢٠°

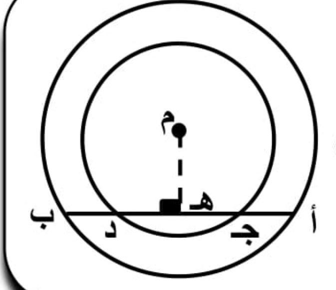
، ق (م $\hat{ص}$ س) = ٩٠ – ٥٠ = ٤٠°

في Δ س م ص :

ق (س $\hat{م}$ ص) = ١٨٠ – (٢٠ + ٤٠) = ١٢٠°

١

دائرتان متحدتا المركز م
أ ب وتر في الدائرة الكبرى
يقطع الصغرى في جـ ، د
اثبت أن : أ جـ = ب د



الحل

العمل : نرسم م هـ عمودى على أ ب

....

٢

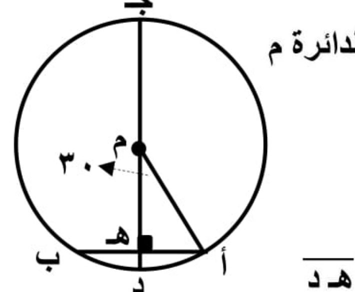
أ ب // جـ د
س منتصف أ ب
اثبت أن :
ص منتصف جـ د

الحل

....

٣

جـ د قطر في الدائرة م
م هـ ⊥ أ ب
ق (أ م̂ هـ) = ٣٠°
أ ب = ١٠ سم
أوجد طول جـ د ، هـ د



الحل

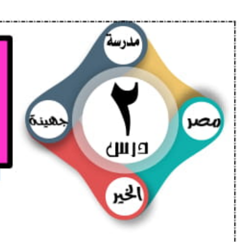
....

٤

أ ب جـ ∆ مرسوم داخل دائرة
م د ⊥ ب جـ ، م هـ ⊥ أ جـ
اثبت أن: ١) هـ د // أ ب
٢) محيط ∆ جـ د هـ = $\frac{1}{2}$ محيط ∆ أ ب جـ

الحل

....

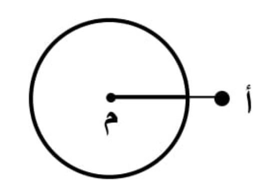


أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

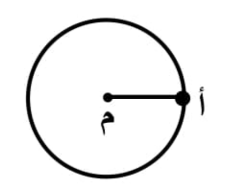
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فإن النقطة أ تقع :

خارج الدائرة



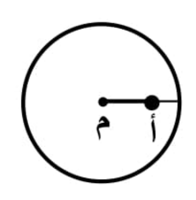
إذا كان : م أ > نق

على للدائرة



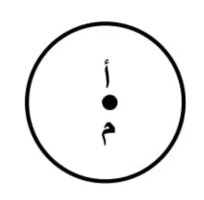
إذا كان : م أ = نق

داخل الدائرة



إذا كان : م أ < نق

على المركز

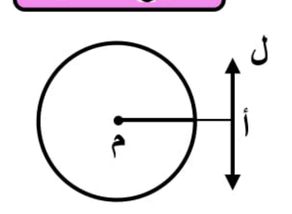


إذا كان : م أ = صفر

أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة ∋ المستقيم فإن المستقيم يكون :

خارج الدائرة

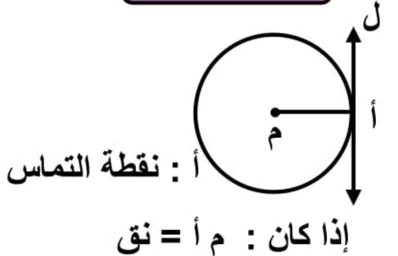


إذا كان : م أ > نق

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ الدائرة م = Φ

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ سطح م = Φ

مماس للدائرة

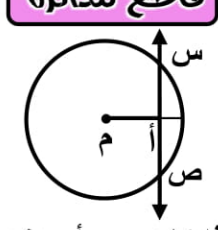


إذا كان : م أ = نق

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ الدائرة م = { أ }

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ سطح م = { أ }

قاطع للدائرة



إذا كان : م أ < نق

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ الدائرة م = { س ، ص }

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ سطح م = $\overline{س ص}$

تدريب

إذا كانت م دائرة طول قطرها ٨ سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإن المستقيم ل يكون ....

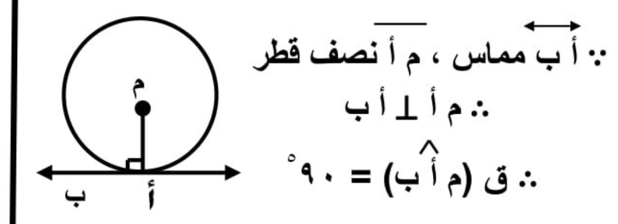
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة في المستوى بحيث م أ = ٤ سم فإن أ تقع .... الدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، والمستقيم ل مماس ، فإن المستقيم ل يبعد عن مركزها .... سم

نتائج هامة على المماس

إعداد / محمود عوض

المماس عمودى على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس



∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{مأ}$ نصف قطر

∴ م أ ⊥ أ ب

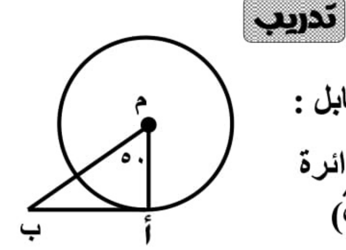
∴ ق ($\hat{مأب}$) = ٩٠°

تدريب

في الشكل المقابل :

$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة

أوجد ق ($\hat{ب}$)



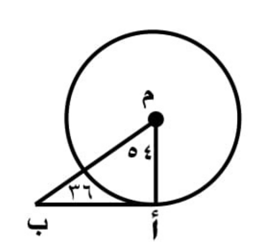
الحل

لإثبات أن المستقيم مماس

هنثبت ان الزاوية اللى بينه وبين نصف القطر قياسها ٩٠

تدريب في الشكل المقابل

اثبت أن $\overleftarrow{أب}$ مماس



الحل

في Δ م أ ب :

ق ($\hat{مأب}$) = ١٨٠ – (٣٦+٥٤) = ٩٠°

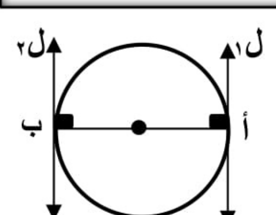
∴ $\overleftarrow{أب}$ مماس

المماسان المرسومان من نهايتى قطر متوازيان

∵ $\overline{أب}$ قطر

، ل١ ، ل٢ مماسان

∴ $\overleftrightarrow{ل١}$ // $\overleftrightarrow{ل٢}$



ملحوظة : **المماسان المرسومان من نهايتى وتر متقاطعان**



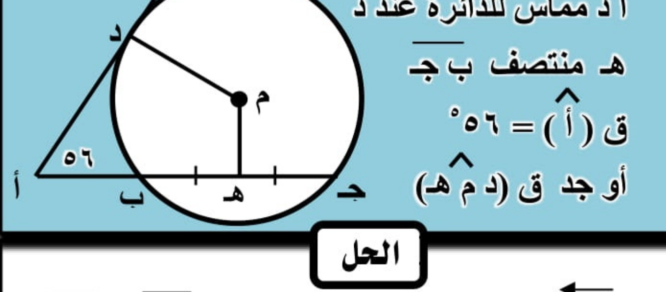
مثال ١

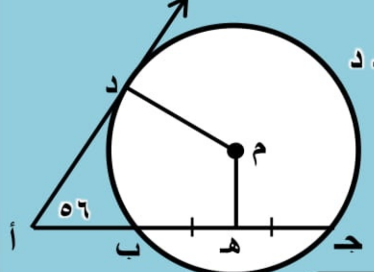
$\overleftarrow{أد}$ مماس للدائرة عند د

هـ منتصف $\overline{بجـ}$

ق ($\hat{أ}$) = ٥٦°

أو جد ق ($\hat{دمهـ}$)





الحل

∵ $\overleftarrow{أد}$ مماس ، $\overline{مد}$ نصف قطر ∴ $\overline{مد}$ ⊥ $\overline{أد}$

∴ ق ($\hat{مدأ}$) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{جـب}$ ∴ $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{جـب}$

∴ ق ($\hat{مهـب}$) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى م هـ أ د = ٣٦٠°

∴ ق ($\hat{دمهـ}$) = ٣٦٠ – (٥٦ + ٩٠ + ٩٠)

= ٣٦٠ – ٢٣٦ = ١٢٤°

مثال ٢

$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة عند أ

م أ = ٨ سم

ق ($\hat{ب}$) = ٣٠°

أوجد طول كل من أ ب ، أ جـ

الحل

∵ $\overleftarrow{أب}$ مماس ∴ $\overline{مأ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ Δ م أ ب قائم

∵ ق($\hat{مبأ}$) = ٣٠° ∴ م ب = ٢ × ٨ = ١٦ سم

من فيثاغورث : في Δ م أ ب

(أ ب)^2 = ٢٥٦ – ٦٤ = ١٩٢ ∴ أ ب = $\sqrt{١٩٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$

فى Δ أ ب جـ : ∵ أ جـ هو الضلع المقابل للزاوية ٣٠°

∴ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ الوتر أ ب ∴ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ $\sqrt{٣}$ = ٤ $\sqrt{٣}$

ملحوظة: يمكن حساب أ جـ باستخدام نظرية اقليدس

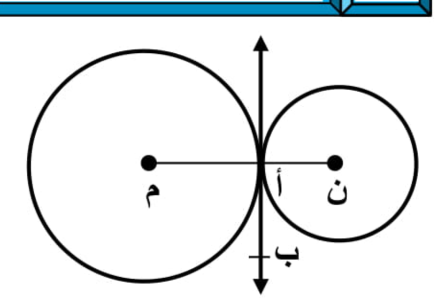
مدرسة مصر الخير جهينة — درس ٣

أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة

إعداد / محمود عوض

إذا كانت م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$ ، م ن خط المركزين فإن الدائرتان تكونان :

١ متماستان من الخارج



✸ إذا كان : م ن = نق$_1$ + نق$_2$

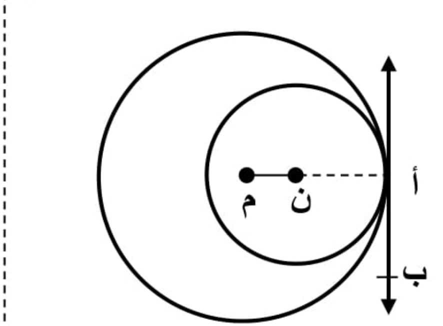
م ن = المجموع

✸ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

✸ سطح م ∩ سطح ن = { أ }

✸ $\overleftrightarrow{أب}$ يسمى مماس مشترك

٢ متماستان من الداخل



✸ إذا كان : م ن = نق$_1$ − نق$_2$

م ن = الطرح

✸ الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

✸ سطح م ∩ سطح ن = سطح ن

✸ $\overleftrightarrow{أب}$ يسمى مماس مشترك

٣ متقاطعتان

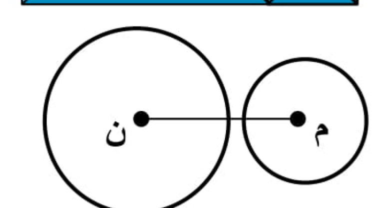
✸ نق$_1$ − نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$

الطرح < م ن < المجموع

✸ الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

✸ أ ب يسمى وتر مشترك

٤ متباعدتان



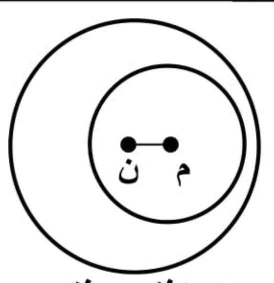
✸ إذا كان : م ن > نق$_1$ + نق$_2$

م ن > المجموع

✸ الدائرة م ∩ الدائرة ن = Φ

✸ سطح م ∩ سطح ن = Φ

٥ متداخلتان



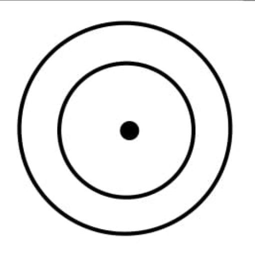
✸ م ن < نق$_1$ − نق$_2$

م ن < الطرح

✸ الدائرة م ∩ الدائرة ن = Φ

✸ سطح م ∩ سطح ن = سطح م

٦ متحدتا المركز



✸ إذا كان : م ن = صفر

✸ الدائرة م ∩ الدائرة ن =

✸ سطح م ∩ سطح ن = سطح م

ملحوظة : عشان تحدد وضع الدائرتان اجمع نق$_1$ + نق$_2$ واطرح نق$_1$ − نق$_2$ وقارنهم بخط المركزين

تدريب

م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٩ سم ، ٥ سم حدد موضع الدائرتان عندما :

١- م ن = ١٤ سم
الدائرتان ....

٢- م ن = ٤ سم
الدائرتان ....

٣- م ن = ٣ سم
الدائرتان ....

٤- م ن = ١٦ سم
الدائرتان ....

٥- م ن = صفر
الدائرتان ....

٦- م ن = ٧ سم
الدائرتان ....

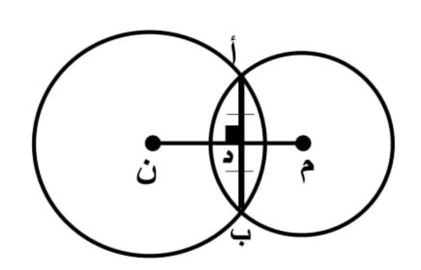
أ / محمود عوض
معلم أول رياضيات

نتائج هامة على خط المركزين



فى الدائرتان المتقاطعتان

خط المركزين عمودى على الوتر المشترك وينصفه



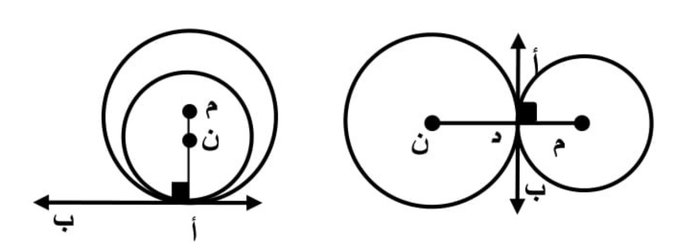
∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك ، $\overline{\text{م ن}}$ خط المركزين

∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق ($\widehat{\text{م د أ}}$) = 90°

، $\overline{\text{م ن}}$ ينصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ د = د ب



خط المركزين عمودى على المماس المشترك



∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك ، م ن خط المركزين

∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ ق ($\widehat{\text{م د أ}}$) = 90°

تصميم محمود عوض
معلم اول رياضيات

مثال ١

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

ق ($\widehat{\text{م ن د}}$) = 125°

ق ($\widehat{\text{ب جـ د}}$) = 55°

اثبت أن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مماس

الحل

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك ، $\overline{\text{م ن}}$ خط المركزين

∴ $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{م ن}}$ ∴ ق ($\widehat{\text{أ هـ ن}}$) = 90°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = 360°

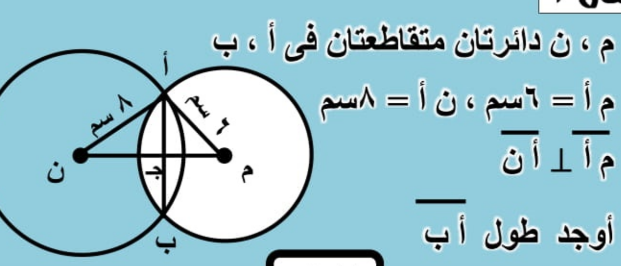
∴ ق ($\widehat{\text{د}}$) = ٣٦٠ − (١٢٥ + ٥٥ + ٩٠) = 90°

∴ $\overline{\text{ن د}} \perp \overline{\text{جـ د}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مماس

(وهو المطلوب اثباته)

مثال ٢



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

م أ = ٦سم ، ن أ = ٨سم

$\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ ن}}$

أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

الحل

فى Δ أ م ن (من فيثاغورث) :

∵ $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{م ن}}$ ∴ $(\text{م ن})^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

∴ م ن = ١٠ سم

∵ أ ب وتر مشترك ∴ م ن ⊥ أ ب

من إقليدس : $\text{أ جـ} = \frac{\text{أ م} \times \text{أ ن}}{\text{م ن}} = \frac{6 \times 8}{10} = 4{,}8$ سم

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك ∴ م ن ينصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ أ ب = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم

تدريبات

أ ب مماس ، د أ قطر

هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٥٠°

أوجد: ق (أ م هـ)

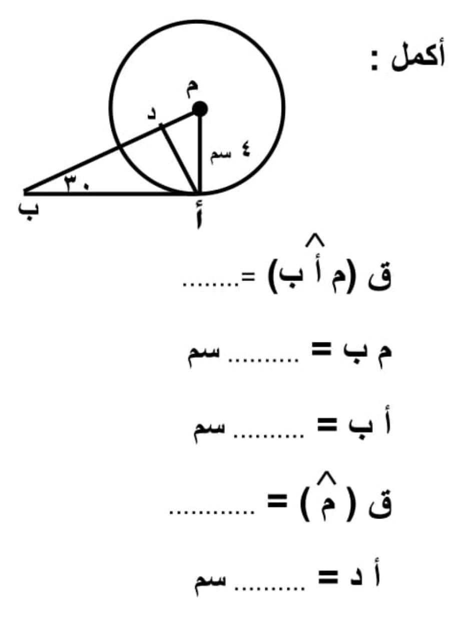
الحل

أ ب مماس

أوجد طول $\overline{\text{د ب}}$

الحل

أكمل :



ق (م $\hat{\text{أ}}$ ب) =........

م ب = ... سم

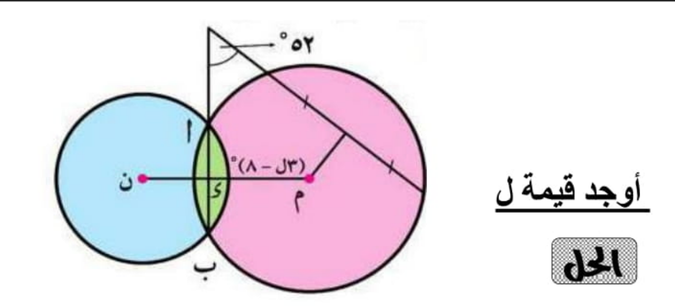
أ ب = ... سم

ق ($\hat{\text{م}}$) = ...

أ د = ... سم

أوجد قيمة ل

الحل

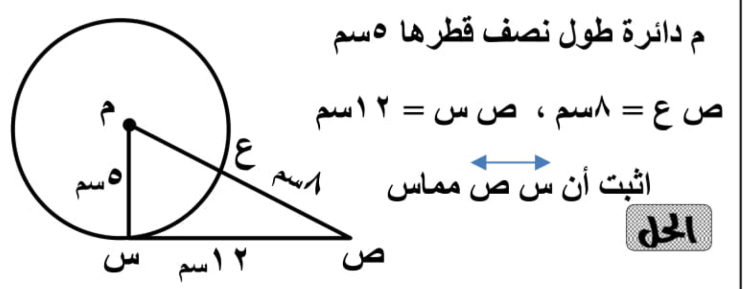


م دائرة طول نصف قطرها ٥سم

ص ع = ٨سم ، ص س = ١٢سم

اثبت أن $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس

الحل



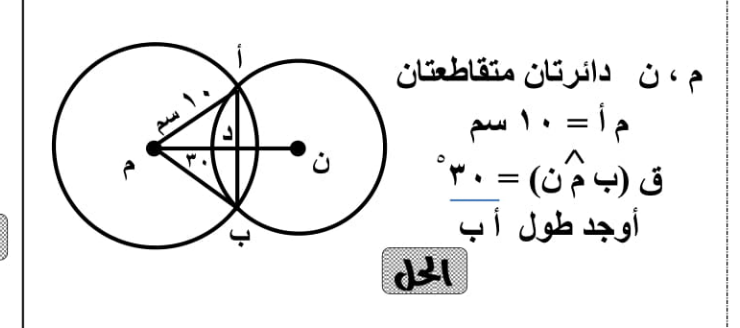
م ، ن دائرتان متقاطعتان

م أ = ١٠ سم

ق (ب $\hat{\text{م}}$ ن) = ٣٠°

أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

الحل



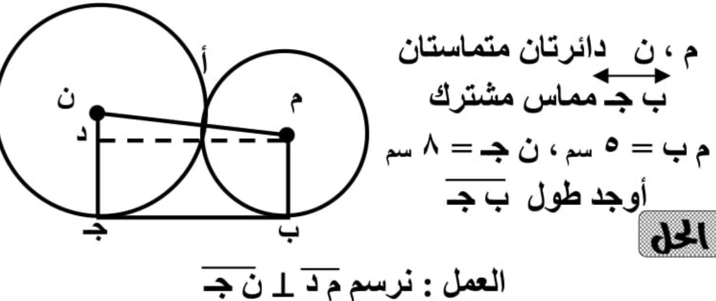
م ، ن دائرتان متماستان

$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس مشترك

م ب = ٥ سم ، ن جـ = ٨ سم

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$

الحل



العمل : نرسم $\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{ن جـ}}$

∵ ب جـ مماس مشترك ∴ $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ن جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ الشكل م ب جـ د مستطيل

∴ د جـ = م ب = ٥سم ∴ ن د = ٨ – ٥ = ٣ سم

م ن = ٥ + ٨ = ١٣سم ومن فيثاغورث في Δ م د ن:

(م د)^{٢} = ١٦٩ – ٩ = ١٦٠ م د = ٤ $\sqrt{١٠}$ ، ب جـ = ٤ $\sqrt{١٠}$

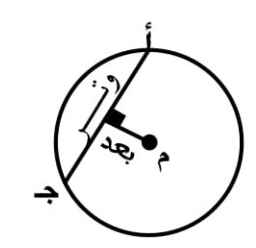
العلاقة بين الأوتار والأبعاد

مدرسة مصر الخير جهينة – درس ٤

إعداد / محمود عوض

البعد لازم يكون عمودى

ولو قالك انه ينصف الوتر استنتج من التنصيف انه عمودى

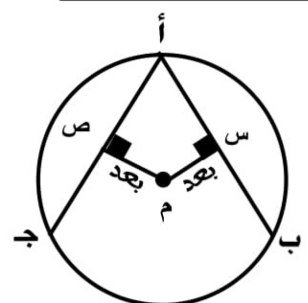


في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأبعاد تكون متساوية

∵ أ ب = أ جـ (الأوتار متساوية)

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

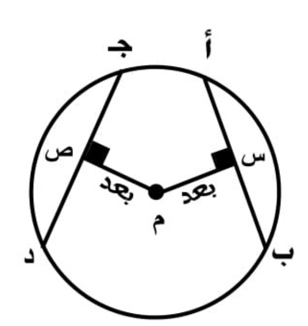


في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأبعاد متساوية فإن الأوتار تكون متساوية

∵ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

∴ أ ب = جـ د (الأوتار متساوية)



لو عطالك وترين متساويين : استنتج ان البعدين متساويين والعكس.

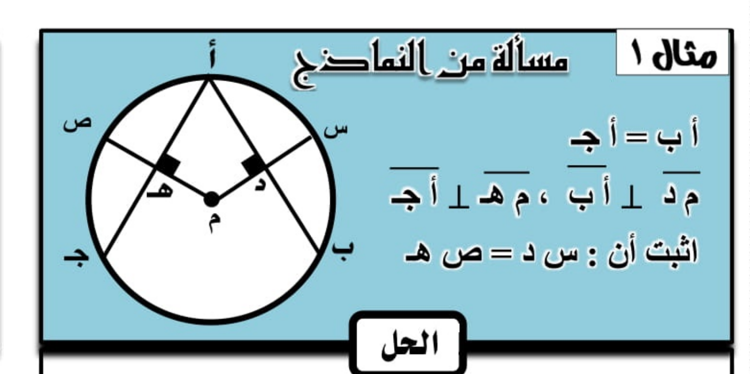
ولو طلب منك تثبت ان وترين متساويين : حاول تثبت ان البعدين متساويين والعكس.

مثال ١ — مسألة من النماذج

أ ب = أ جـ

م د ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ

اثبت أن : س د = ص هـ



الحل

∵ أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

، ∵ م د ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ

∴ م د = م هـ ⟵ (١) (الأبعاد متساوية)

، ∵ م س = م ص ⟵ (٢) (أنصاف أقطار)

بطرح ١ من ٢ ينتج أن :

س د = ص هـ

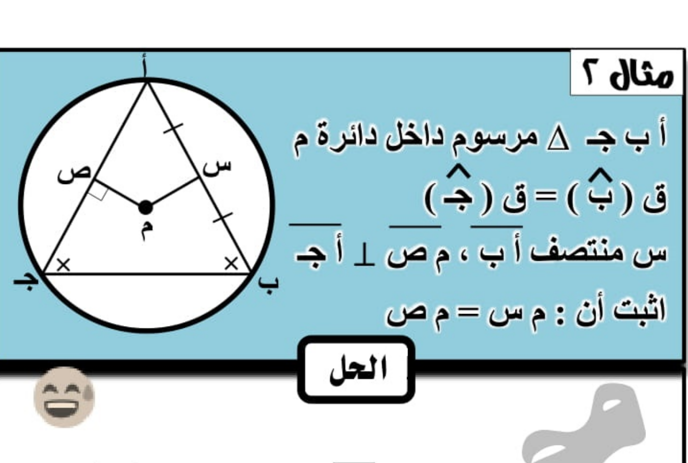
مثال ٢

أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة م

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

س منتصف أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

اثبت أن : م س = م ص



الحل

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

في △ أ ب جـ :

∵ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

∴ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

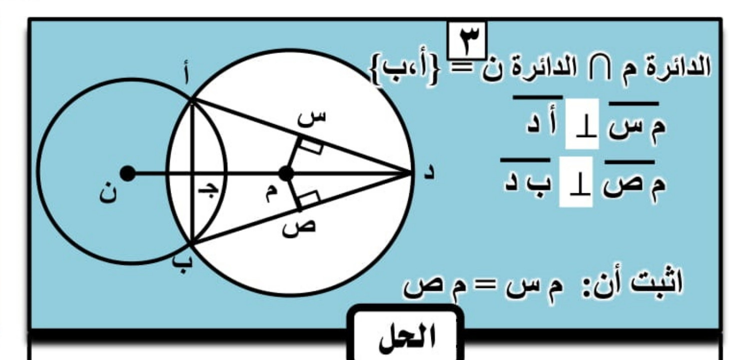
٣

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ،ب}

م س ⊥ أ د

م ص ⊥ ب د

اثبت أن: م س = م ص



الحل

∵ أ ب وتر مشترك ، م ن خط المركزين

∴ م ن ⊥ أ ب ، جـ منتصف أ ب

أي أنه في ∆ د أ ب : د جـ محور تماثل أ ب

لأن د جـ ⊥ أ ب و تنصفه

∴ ∆ د أ ب متساوى الساقين

∴ د أ = د ب وهى أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

ملحوظة: يمكن الإثبات عن طريق تطابق ∆∆ أدجـ ، ب دجـ

٤

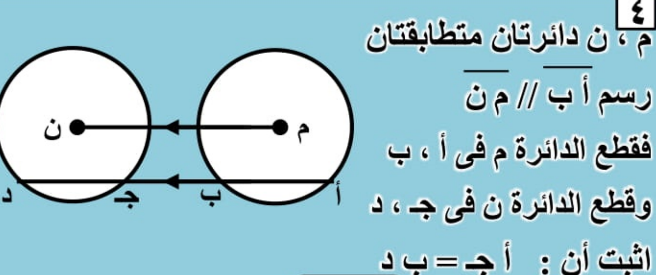
م ، ن دائرتان متطابقتان

رسم أ ب // م ن

فقطع الدائرة م فى أ ، ب

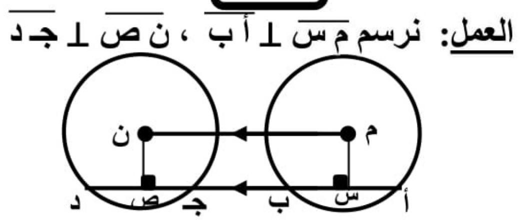
وقطع الدائرة ن فى جـ ، د

اثبت أن : أ جـ = ب د



الحل

العمل: نرسم م س ⊥ أ ب ، ن ص ⊥ جـ د



∵ م ن // أ ب ، م س ⊥ أ ب ، ن ص ⊥ جـ د

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ أ ب = جـ د (الأوتار متساوية)

بإضافة ب جـ للطرفين

∴ أ جـ = ب د هـ ط ث

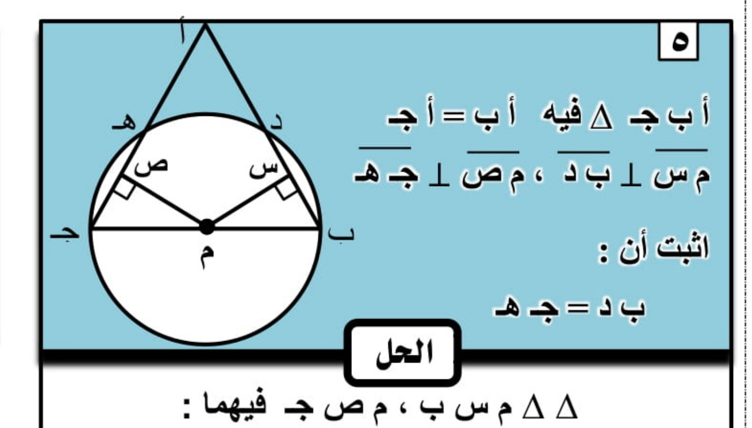
٥

أ ب جـ ∆ فيه أ ب = أ جـ

م س ⊥ ب د ، م ص ⊥ جـ هـ

اثبت أن :

ب د = جـ هـ



الحل

∆ ∆ م س ب ، م ص جـ فيهما :

م ب = م جـ أنصاف أقطار

ق(م س^ ب) = ق (م ص^ جـ) = ٩٠°

ق(ب^) = ق (جـ^) لأن أ ب = أ جـ

∴ ∆ م س ب ≡ ∆ م ص جـ

ومن التطابق ينتج أن : م س = م ص (أبعاد)

، ∵ م س ⊥ ب د ، م ص ⊥ هـ جـ

∴ ب د = جـ هـ

٦

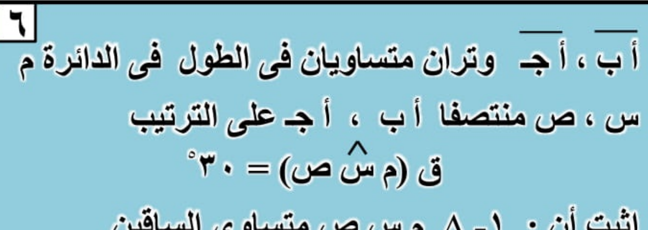
أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

ق (م س^ ص) = ٣٠°

اثبت أن : ١- ∆ م س ص متساوى الساقين

٢- ∆ أ س ص متساوى الأضلاع



الحل

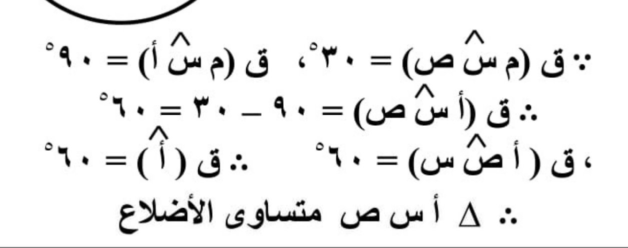
∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ ∆ م س ص متساوى الساقين



∵ ق (م س^ ص) = ٣٠°، ق (م س^ أ) = ٩٠°

∴ ق (أ س^ ص) = ٩٠ – ٣٠ = ٦٠°

، ق (أ ص^ س) = ٦٠° ∴ ق (أ^) = ٦٠°

∴ ∆ أ س ص متساوى الأضلاع

١



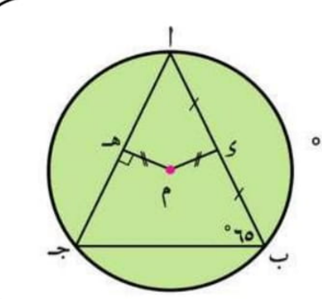
إذا كان:

م ى = م هـ

ق (∠ ب) = ٦٥°

فأوجد :

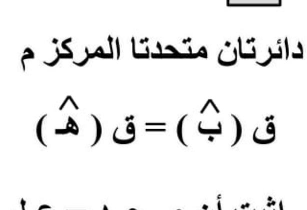
ق (∠ أ)



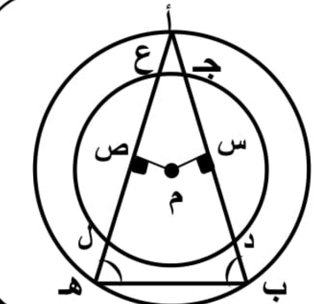
الحل

٢

دائرتان متحدتا المركز م

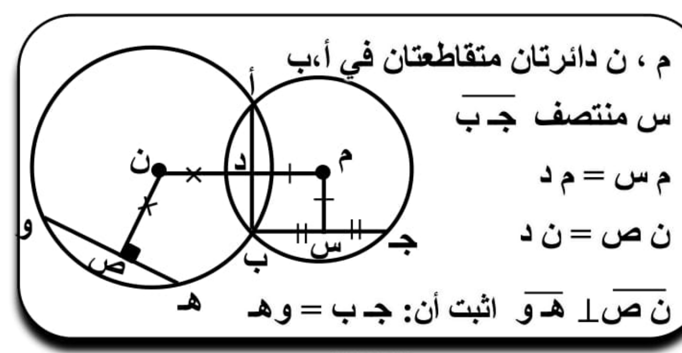


اثبت أن : جـ د = ع ل



الحل

٣



الحل

٤

دائرتان متحدتا المركز م

أ ب ، جـ د مماسان للصغرى

اثبت أن : أ ب = جـ د

الحل



تعيين الدائرة

إعداد / محمود عوض

تُعيَّن الدائرة إذا علم : ١- مركزها ٢- طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بنقطة

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة واحدة.

رسم دائرة تمر بنقطتين

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطتين.

◆ ولكن إذا علم طول القطعة المستقيمة أ ب وطول نصف قطر المطلوبة فإن:

- إذا كان **نق** > $\frac{1}{2}$ **أ ب** فإنه يمكن رسم **دائرتان** فقط .
- إذا كان **نق** = $\frac{1}{2}$ **أ ب** فإنه يمكن رسم **دائرة واحدة** فقط وهى **أصغر** دائرة.
- إذا كان **نق** < $\frac{1}{2}$ **أ ب** فإنه **لا يمكن** رسم أى دائرة.

مثال: إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة طولها ٧ سم فإن أصغر دائرة يمكن أن تمر بالنفطتين أ ، ب طول نصف قطرها ......

رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

◆ أي ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر بها دائرة.

◆ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بيها دائرة وحيدة.

الدائرة الخارجة للمثلث	الدائرة الداخلة للمثلث
مركزها هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها **(محاور تماثل أضلاعه)**	مركزها هو نقطة تقاطع **منصفات زواياه الداخلة**

❖ **يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من : المستطيل - المربع - شبه المنحرف المتساوى الساقين**

❖ **لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس : متوازى الأضلاع - المعين - شبه المنحرف غير المتساوى الساقين**

تدريب :

١(ارسم القطعة أ ب = ٤ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم تمر بالنقطتين أ ، ب

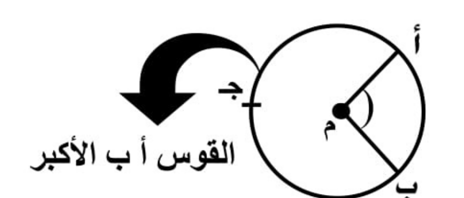
٢(ارسم $\triangle$ أ ب جـ المتساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ثم حدد موضع الدائرة بالنسبة لارتفاعاته.

الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الزاوية المركزية

هي زاوية رأسها مركز الدائرة ويحمل ضلعيها أنصاف أقطار

- أ م ب زاوية مركزية
- القوس المقابل لها هو القوس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$
- القوس أ جـ ب يسمى $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأكبر



قياس القوس

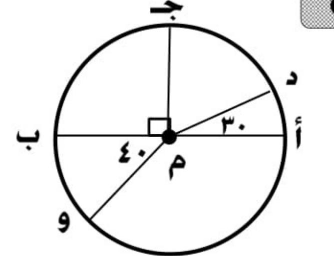
قياس القوس يساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ملاحظات

أ
ب
هـ

- ◆ قياس الدائرة كلها = ٣٦٠°
- ◆ قياس نصف الدائرة = ١٨٠°
- ◆ قياس ربع الدائرة = ٩٠°
- ◆ قياس خُمس الدائرة= $\frac{٣٦٠}{٥}$ =٧٢

مثال



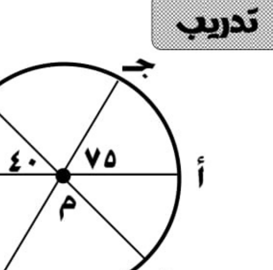
ق $(\overset{\frown}{\text{أ د}})$ = ٣٠° ق $(\overset{\frown}{\text{جـ ب}})$ = ٩٠°

ق $(\overset{\frown}{\text{د جـ}})$ = ٩٠ ـ ٣٠ = ٦٠°

ق $(\overset{\frown}{\text{د جـ ب}})$ = ٦٠ + ٩٠ = ١٥٠°

ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب و}})$ = ١٨٠ + ٤٠ = ٢٢٠°

تدريب



ق $(\overset{\frown}{\text{أ جـ}})$ = ...

ق $(\overset{\frown}{\text{جـ هـ}})$ = ...

ق $(\overset{\frown}{\text{أ جـ د}})$ = ...

ق $(\overset{\frown}{\text{أ و هـ}})$ = ...

طول القوس

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

مثال

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ الدائرة .

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطرالدائرة ٧ سم .

الحل

قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ الدائرة = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

= $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١٤,٦ سم

تدريب

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٦}$ الدائرة .

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطرالدائرة ٧ سم .

الحل

....

....

....

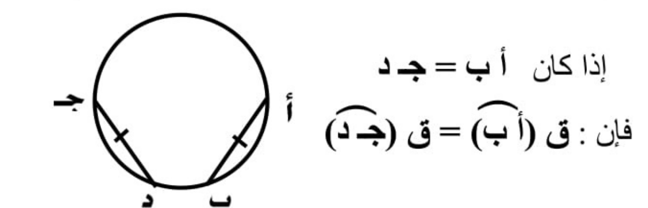
....

....

نعيم محمود عوض
معلم اول رياضيات

نتائج هامة

إذا كانت الأوتار متساوية فإن أقواسها تكون متساوية


إذا كان أ ب = جـ د

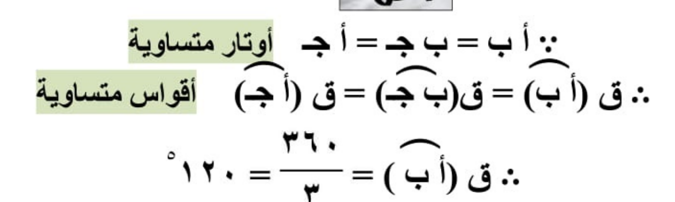
فإن : ق (⌒أ ب) = ق (⌒جـ د)

مثال

أ ب جـ △ متساوى الأضلاع

أوجد ق (⌒أ ب)

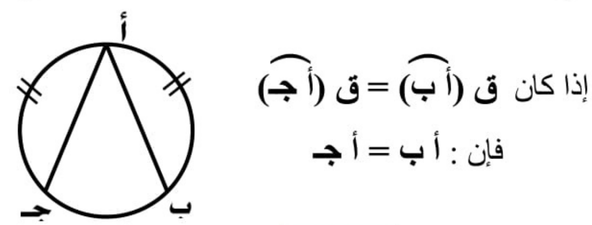
الحل


∵ أ ب = ب جـ = أ جـ أوتار متساوية

∴ ق (⌒أ ب) = ق(⌒ب جـ) = ق (⌒أ جـ) أقواس متساوية

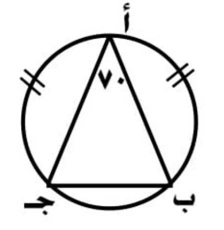
∴ ق (⌒أ ب) = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

إذا كانت الأقواس متساوية فإن أوتارها تكون متساوية


إذا كان ق (⌒أ ب) = ق (⌒أ جـ)

فإن : أ ب = أ جـ

مثال



ق (⌒أ ب) = ق (⌒أ جـ)

ق ($\hat{أ}$) = ٧٠

فأوجد ق ($\hat{ب}$)

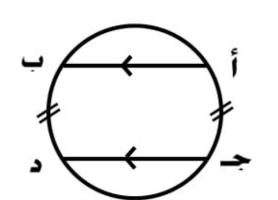
الحل

∵ ق (⌒أ ب) = ق (⌒أ جـ) أقواس متساوية

∴ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

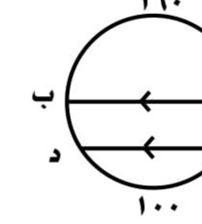
∴ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

الوتران المتوازيان يحصران قوسان متساويان


إذا كان $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ د}$

فإن ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ب د)

تدريب



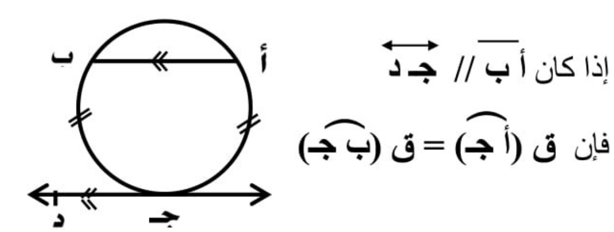
إذا كان $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ د}$

، ق (⌒أ ب) = ١٦٠°

ق (⌒جـ د) = ١٠٠°

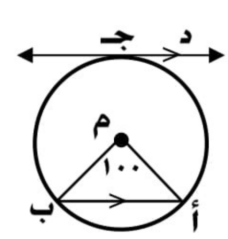
فإن ق (⌒أ جـ) = ...

الوتر والمماس المتوازيان يحصران قوسان متساويان


إذا كان $\overline{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$

فإن ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ب جـ)

تدريب



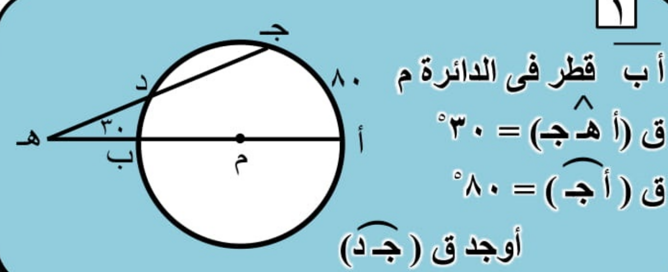
إذا كان $\overline{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$

ق ($\hat{أ م ب}$) = ١٠٠°

فإن ق (⌒أ جـ) = ...

الأقواس المتساوية في الطول متساوية في القياس في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

١



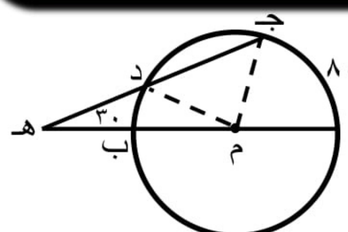
$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م

ق (أ $\hat{هـ}$ جـ) = ٣٠°

ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ٨٠°

أوجد ق ($\overset{\frown}{جـ د}$)

الحل



العمل : نرسم $\overline{م جـ}$ ، $\overline{م د}$

∵ ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ٨٠° ∴ ق (أ $\hat{م}$ جـ) = ٨٠°

∵ أ $\hat{م}$ جـ زاوية خارجة عن Δ جـ م هـ

∴ ق (م $\hat{جـ}$ هـ) = ٨٠ – ٣٠ = ٥٠°

في Δ جـ م د : ∵ م جـ = م د (أنصاف أقطار)

∴ ق (جـ $\hat{م}$ د) = ١٨٠ – (٥٠ + ٥٠) = ٨٠°

∴ ق ($\overset{\frown}{جـ د}$) = ٨٠°

٢

أ ب جـ د مستطيل مرسوم داخل دائرة

جـ هـ = جـ د

اثبت أن : أ هـ = ب جـ

الحل

∵ أ ب = د جـ خواص المستطيل

، هـ جـ = د جـ (معطى)

∴ أ ب = هـ جـ

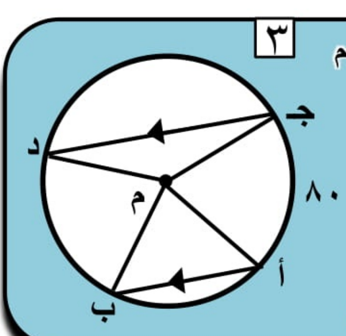
∴ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق ($\overset{\frown}{هـ جـ}$)

بإضافة ق ($\overset{\frown}{ب هـ}$) للطرفين

∴ ق ($\overset{\frown}{أ هـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$)

∴ أ هـ = ب جـ هـ ط ث

٣



م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم

، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران متوازيان

ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ٨٠°

طول ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = طول ($\overset{\frown}{أ ب}$)

أوجد : ١- ق(م $\hat{أ}$ ب)

٢- ق ($\overset{\frown}{جـ د}$) ٣- طول ($\overset{\frown}{جـ د}$)

الحل

∵ طول ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = طول ($\overset{\frown}{أ ب}$)

∴ ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٨٠°

∴ ق (أ $\hat{م}$ ب) المركزية = ٨٠°

∵ م أ = م ب (أنصاف أقطار) ∴ Δ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق (م $\hat{أ}$ ب) = ق (م $\hat{ب}$ أ) = ٥٠° المطلوب الأول

∵ $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ د}$ ∴ ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب د}$) = ٨٠°

∵ ق($\overset{\frown}{جـ د}$) + ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) + ق($\overset{\frown}{أ ب}$) + ق($\overset{\frown}{ب د}$) = ٣٦٠°

∴ ق ($\overset{\frown}{جـ د}$) = ٣٦٠ – (٨٠ + ٨٠ + ٨٠) = ١٢٠°

طول $\overset{\frown}{جـ د}$ = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٣١,٤ سم

٤

أ ب جـ د هـ خماسى منتظم مرسوم داخل الدائرة م

$\overleftrightarrow{أ س}$ مماس للدائرة عند أ

$\overleftrightarrow{هـ س}$ مماس للدائرة عند هـ

أوجد: ١- ق ($\overset{\frown}{أ هـ}$) ٢- ق (أ $\hat{س}$ هـ)

الحل

العمل : نرسم $\overline{م أ}$ ، $\overline{م هـ}$

∵ أ ب جـ د هـ خماسى منتظم

∴ أ ب = ب جـ = جـ د = د هـ = أ هـ

∴ ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ق($\overset{\frown}{جـ د}$) = ق ($\overset{\frown}{د هـ}$) = ق($\overset{\frown}{أ هـ}$)

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق($\overset{\frown}{أ هـ}$) = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢° أولا

∵ ق($\overset{\frown}{أ هـ}$) = ٧٢° ∴ ق(أ $\hat{م}$ هـ) = ٧٢°

∵ $\overleftrightarrow{أ س}$ مماس ∴ ق(م $\hat{أ}$ س) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{هـ س}$ مماس ∴ ق(م $\hat{هـ}$ س) = ٩٠°

في الشكل الرباعى م أ س هـ :

ق(أ $\hat{س}$ هـ) = ٣٦٠ – (٧٢ + ٩٠ + ٩٠) = ١٠٨°

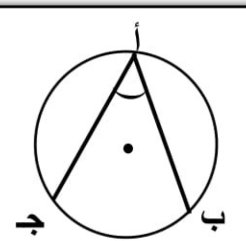


العلاقة بين المحيطية والمركزية

الزاوية المحيطية

هي زاوية رأسها على الدائرة ويحمل ضلعيها وتران

- ب أ جـ زاوية محيطية
- القوس المقابل لها هو ب⁀جـ

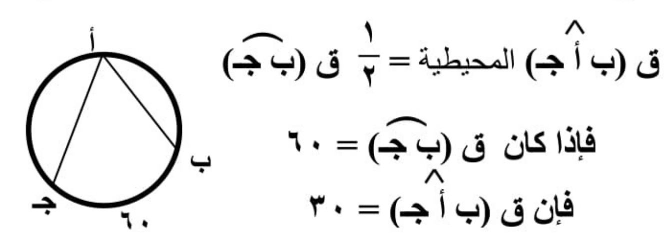


قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس القوس المقابل لها

ق (ب أ^ جـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب⁀جـ)

فإذا كان ق (ب⁀جـ) = ٦٠

فإن ق (ب أ^ جـ) = ٣٠



قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس المركزية المشتركة معها في القوس

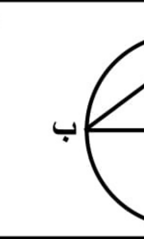
∠ أ جـ ب المحيطية ، ∠ أ م ب المركزية

مشتركتان في أ⁀ب

∴ ق (أ جـ^ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (أ م^ ب)



الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

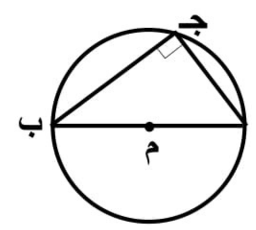


مهم جدا

∵ أ ب قطر

∴ ق (جـ^) المحيطية = ٩٠°

لأنها محيطية القوس المقابل لها نصف دائرة

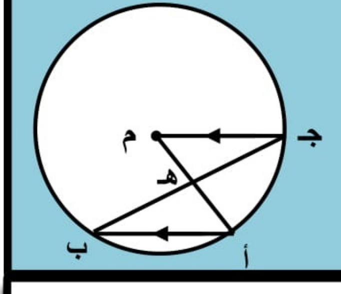


مثال ١

أ ب وتر فى الدائرة م

جـ م // أ ب

اثبت أن : ب هـ > أ هـ



الحل

∵ ق (م^) = ٢ ق (ب^)

مركزية ومحيطية مشتركتان في أ⁀جـ

، ∵ جـ م // أ ب ∴ ق (أ^) = ق (م^) بالتبادل

فى Δ أ هـ ب : ∴ ق (أ^) = ٢ ق (ب^)

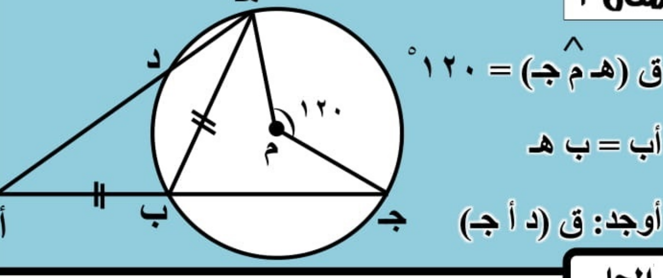
∴ ق (أ^) > ق (ب^) ∴ ب هـ > أ هـ

مثال ٢

ق (هـ م^ جـ) = ١٢٠°

أب = ب هـ

أوجد: ق (د أ جـ)



الحل

∵ ق (هـ ب^ جـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م^) المركزية

لأنهما مشتركتان في أ⁀جـ ∴ ق (هـ ب^ جـ) = ٦٠°

∵ أ ب = ب هـ

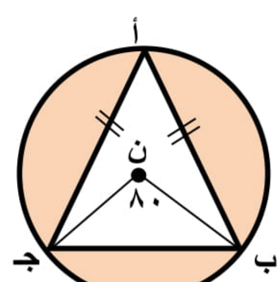
∴ ق(ب هـ^ أ) = ق (هـ أ^ ب) = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠°

١ أ ب = أ جـ ،

ق(ب نَ جـ) = ٨٠°

أوجد: ١) ق(أ بَ جـ)

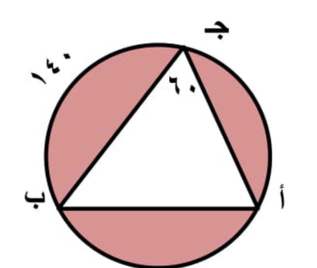
٢) ق (ب جـ) الأكبر



٢ ق (جَـ) = ٦٠°

ق (جـ ب) = ١٤٠°

أوجد ق (أ جـ)



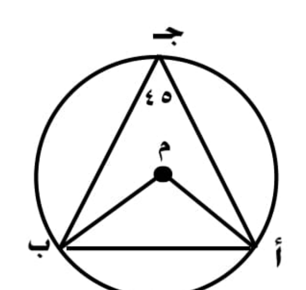
٣ أ ب قطر في الدائرة م

ق (د مَ ب) = ٥٠°

أوجد ق (أ جَـ د)

٤ ق (جَـ) = ٤٥°

أوجد ق (م أَ ب)



٥ أ ب قطر ، أ جـ مماس

هـ منتصف د ب

م ب = ٦ سم ، أ جـ = ٩ سم

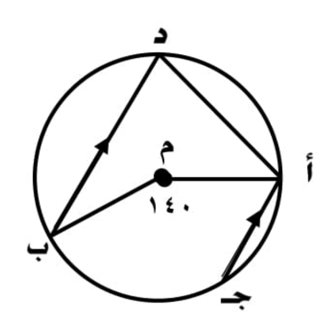
أوجد طول كل من :

ب جـ ، أ د ، م هـ

٦ أ جـ // د ب

ق(أ مَ ب) = ١٤٠°

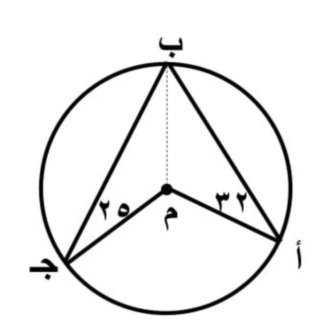
أوجد ق (جـ أَ د)



٧ ق (أَ) = ٣٢°

ق (جَـ) = ٢٥°

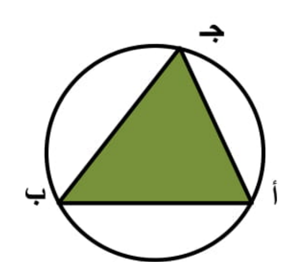
أوجد : ق (أ مَ جـ)



٨ ق(أ ب) : ق(ب جـ) : ق (أ جـ)

= ٤ : ٥ : ٣

أوجد: ق(أ جَـ ب)



٩ ق (بَ) = ١١٥°

أوجد : ق (س مَ ص)

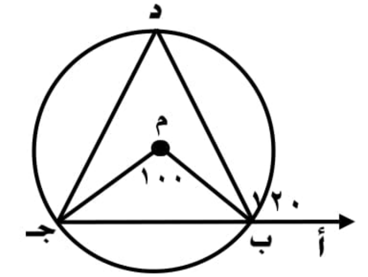
خد بالك : ب محيطية تشترك معها في القوس زاوية مركزية وهى م المنعكسة



١٠ ق (ب مَ جـ) = ١٠٠°

ق (أ بَ د) = ١٢٠°

أوجد ق (د جَـ ب)



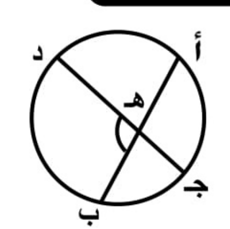


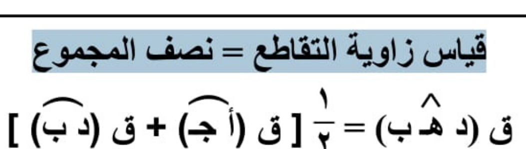
تمارين مشهورة

إعداد / محمود عوض

تمرين مشهور ١

لو تقاطع وتران **داخل** دائرة





قياس زاوية التقاطع = نصف المجموع

ق (د هـ^ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق (أ جـ⌒) + ق (د ب⌒)]

قياس القوس المجهول = ضعف الزاوية ـ المعلوم

ق (أ جـ⌒) = ٢ ق(د هـ^ ب) – ق (د ب⌒)

تدريب 1



أوجد قيمة س

تدريب 2



أوجد قيمة ع

مثال ١ فى الشكل المقابل :

أ ب ∩ جـ د = { هـ }

ق (د هـ^ ب) = ١١٠°

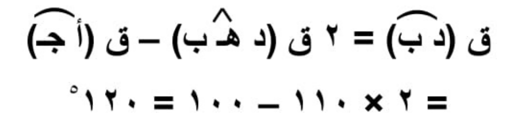
ق (أ جـ⌒) = ١٠٠°

أوجد ق (د جـ^ ب)

(شكل: أ، د، هـ، ١١٠، ١٠٠، ب، جـ)

الحل

من تمرين مشهور ١ :



ق (د ب⌒) = ٢ ق (د هـ^ ب) – ق (أ جـ⌒)

= ٢ × ١١٠ – ١٠٠ = ١٢٠°

∵ ق (د جـ^ ب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (د ب⌒)

∴ ق (د جـ^ ب) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

تمرين مشهور ٢

لو تقاطع وتران **خارج** دائرة

(شكل: أ، د، هـ، ب، جـ)

قياس زاوية التقاطع = نصف الطرح

ق (هـ^) = $\frac{1}{2}$ [ق (أ جـ⌒) – ق (د ب⌒)]

قياس القوس الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

ق (أ جـ⌒) = ٢ ق(هـ^) + ق (د ب⌒)

قياس القوس الأصغر = الأكبر – ضعف الزاوية

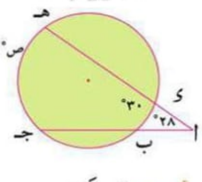
ق (د ب⌒) = ق (أ جـ⌒) – ٢ ق(هـ)

تدريب 3

(شكل: هـ، ١٠٠°، ٣٠°، ء، س، أ، جـ، ب)

أوجد قيمة س

تدريب 4



أوجد قيمة ص

مثال ٢ فى الشكل المقابل :

ق (أ^) = ٣٠°، ق (ب د⌒) = ٤٤°

ق (د جـ^ هـ) = ٤٨°

أوجد : ١- ق (هـ جـ⌒)

٢- ق (ب جـ⌒)

(شكل: هـ، د، و، ٤٨، ٤٤، ٣٠، جـ، ب، أ)

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق(هـ جـ⌒) = ٢ ق(أ^) + ق (د ب⌒)

∴ ق (هـ جـ⌒) = ٢ × ٣٠ + ٤٤ = ١٠٤° **أولا**

∵ ق (د جـ^ هـ) المحيطية = ٤٨°

∴ ق(د هـ⌒) = ٤٨×٢ = ٩٦°

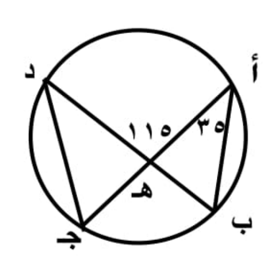
∵ قياس الدائرة = ٣٦٠

∴ ق (ب جـ⌒) = ٣٦٠ – (٤٤ + ١٠٤ + ٩٦) = ١١٦°

تدريبات على تمرين مشهور ١ ، ٢



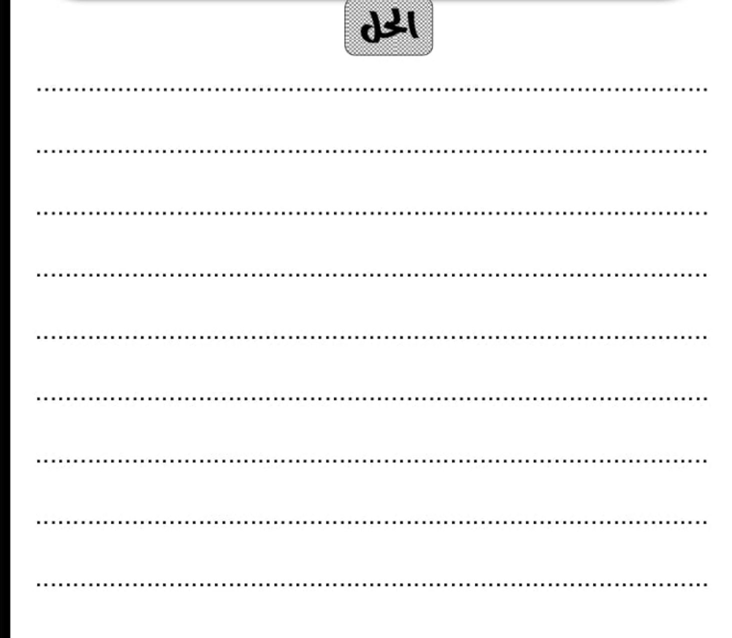
١ في الشكل المقابل :



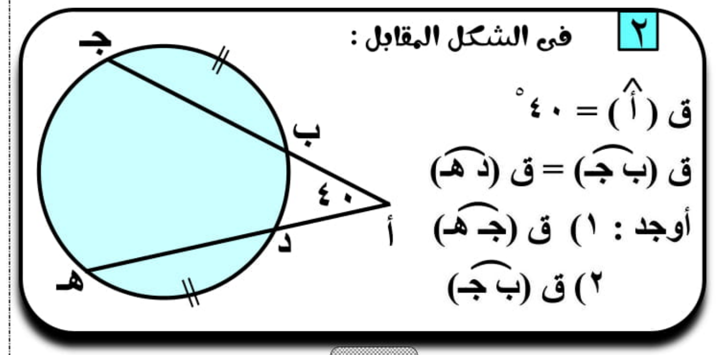
ق (أ) = ٣٥°

ق (أ هـ د) = ١١٥°

أوجد : ق (أ د)



الحل



٢ في الشكل المقابل :

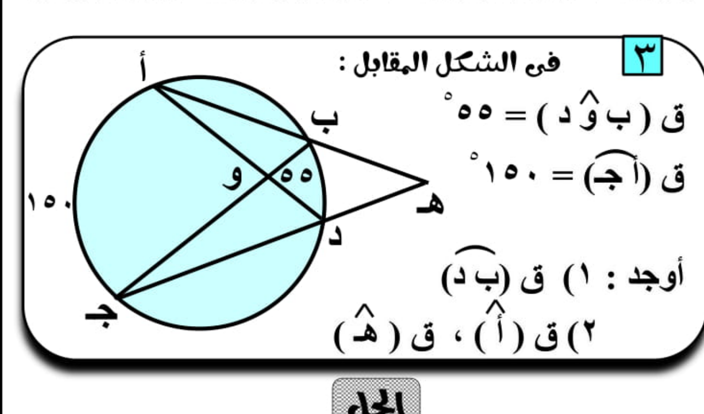
ق (أ) = ٤٠°

ق (ب جـ) = ق (د هـ)

أوجد : ١) ق (جـ هـ)

٢) ق (ب جـ)

الحل



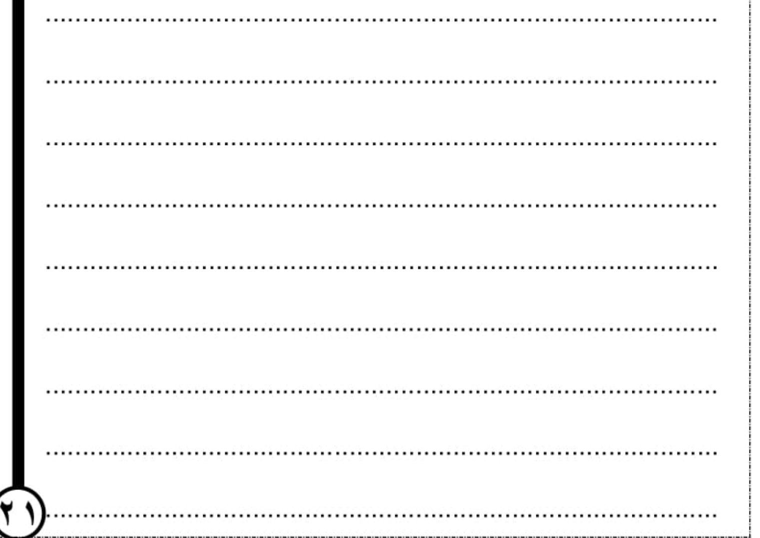
٣ في الشكل المقابل :

ق (ب و د) = ٥٥°

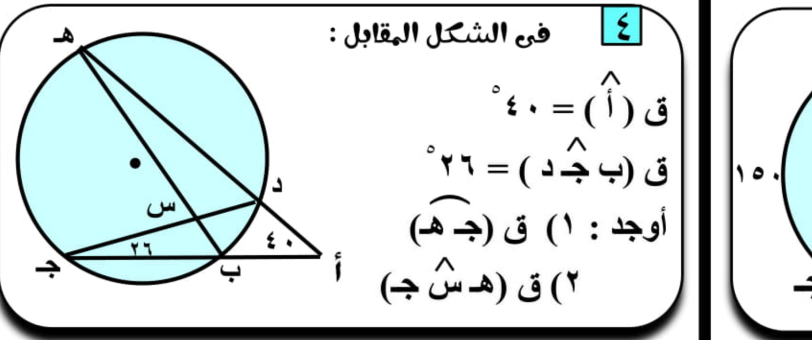
ق (أ جـ) = ١٥٠°

أوجد : ١) ق (ب د)

٢) ق (أ) ، ق (هـ)



الحل



٤ في الشكل المقابل :

ق (أ) = ٤٠°

ق (ب جـ د) = ٢٦°

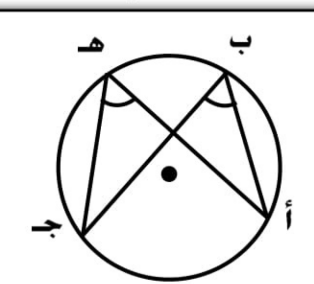
أوجد : ١) ق (جـ هـ)

٢) ق (هـ س جـ)

الحل

الزوايا المحيطية المشتركة في القوس

الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متساوية في القياس



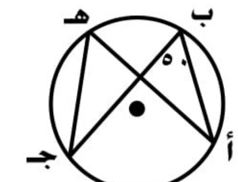
ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{هـ}$)

محيطيتان مشتركتان فى القوس أ جـ

كذلك: ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{جـ}$)

محيطيتان مشتركتان فى القوس ب هـ

فمثلا : في الشكل المقابل :



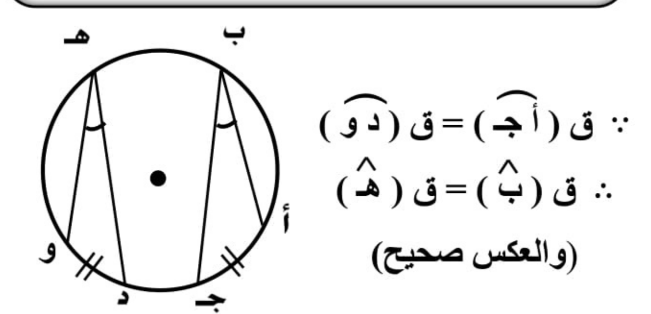


∵ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٥٠°

∴ ق(أ $\hat{هـ}$ جـ) = ...

السبب: ....

الزوايا المحيطية التي أقواسها متساوية تكون متساوية في القياس



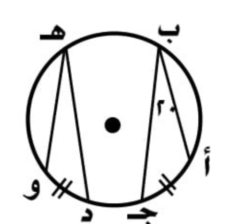
∵ ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{د و}$)

∴ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{هـ}$)

(والعكس صحيح)

محمود عوض
أ/
معلم اول رياضيات

فمثلا : في الشكل المقابل :



∵ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٢٠°

∴ ق(د $\hat{هـ}$ و) = ...

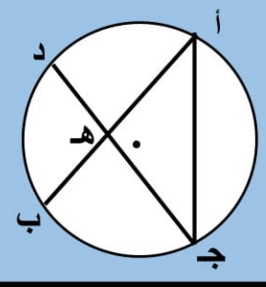
السبب: ....

مثال ١ **فى الشكل المقابل :**

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران متساويان فى الطول

اثبت أن :

Δ أ جـ هـ متساوى الساقين



الحل

∵ أ ب = جـ د ∴ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق($\overset{\frown}{جـ د}$)

بطرح ق ($\overset{\frown}{د ب}$) من الطرفين

∴ ق ($\overset{\frown}{أ د}$) = ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$)

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{أ}$)

∴ Δ أ جـ هـ متساوى الساقين

مثال ٢ **فى الشكل المقابل :**

أ ب = أ جـ

هـ ∈ $\overset{\frown}{ب جـ}$

اثبت أن :

ق (أ $\hat{هـ}$ ب) = ق (أ $\hat{هـ}$ جـ)

الحل

∵ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

∴ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) أقواس متساوية

∴ ق (أ $\hat{هـ}$ ب) = ق (أ $\hat{هـ}$ جـ)

هـ ط ث

القاعد الأولى: إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأقواس متساوية

القاعدة الثانية: إذا كانت الأقواس متساوية فإن الزوايا المحيطية المرسومة عليها متساوية

١ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

د هـ // ب جـ

اثبت أن: ق (د أ^ جـ) = ق (ب أ^ هـ)

الحل

∵ د هـ // ب جـ ∴ ق (د ب) = ق (هـ جـ)

∴ ق(د أ^ ب) المحيطية = ق (هـ أ^ جـ) المحيطية

لأنهما محيطيتان أقواسهما متساوية

<u>وبإضافة ق (ب أ^ جـ) للطرفين</u>

∴ ق (د أ^ جـ) = ق (ب أ^ هـ) هـ ط ث

٢ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة

أ د = د هـ

اثبت أن :

Δ أ د هـ متساوى الأضلاع

الحل

∵ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ ق(ب^) = ٦٠°

∴ ق(د^) = ق (ب^) = ٦٠° محيطيتان مشتركتان في أ جـ

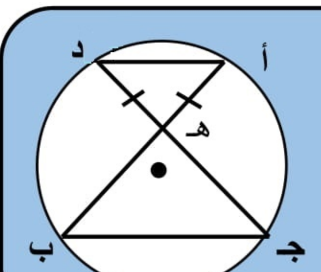
∵ Δ أ د هـ متساوى الساقين

∴ ق (د أ^ هـ) = ق (د هـ^ أ) = ٦٠°

∴ Δ أ د هـ متساوى الأضلاع

هـ ط ث

٣ في الشكل المقابل :



أ ب ∩ جـ د = { هـ }

هـ أ = هـ د

اثبت أن : هـ ب = هـ جـ

∵ هـ أ = هـ د ∴ ق (أ^) = ق (د^)

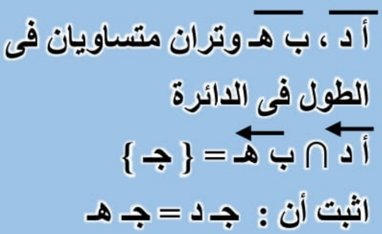
، ∵ ق(أ^) = ق (جـ^) محيطيتان مشتركتان في د ب

، ق (د^) = ق (ب^) محيطيتان مشتركتان في أ جـ

∴ ق (جـ^) = ق (ب^)

∴ Δ هـ جـ ب متساوى الساقين ∴ هـ ب = هـ جـ

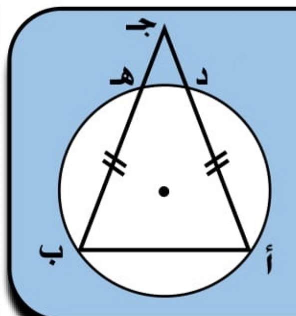
٤ في الشكل المقابل :



أ د ، ب هـ وتران متساويان في الطول في الدائرة

أ د ∩ ب هـ = { جـ }

اثبت أن : جـ د = جـ هـ



∵ أ د = ب هـ ∴ ق (أ د) = ق (ب هـ)

<u>و بإضافة ق (د هـ) للطرفين</u>

∴ ق (أ هـ) = ق (ب د)

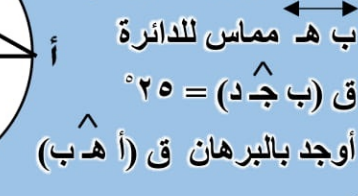
∴ ق (ب^) = ق (أ^) ∴ جـ أ = جـ ب

<u>في Δ جـ أ ب</u> :

∵ جـ أ = جـ ب ، د أ = هـ ب

<u>بالطرح ينتج أن</u> : جـ د = جـ هـ

٥ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م

$\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس للدائرة

ق (ب جـ^ د) = ٢٥°

أوجد بالبرهان ق (أ هـ^ ب)

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر

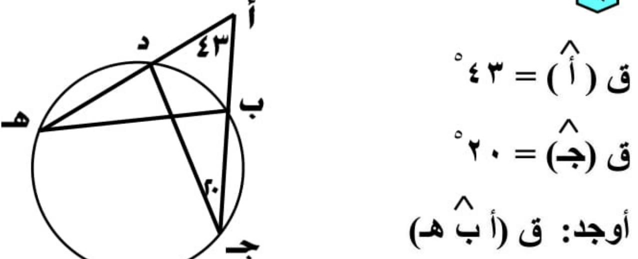
∴ ق (هـ ب^ أ) = ٩٠°

∵ ق (أ^) = ق (جـ^) محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{د ب}}$

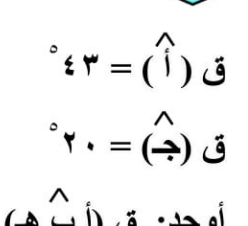
∴ ق (أ^) = ٢٥°

<u>فى Δ هـ ب أ</u> :

ق (أ هـ^ ب) = ١٨٠ – (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°



٦



ق (أ^) = ٤٣°

ق (جـ^) = ٢٠°

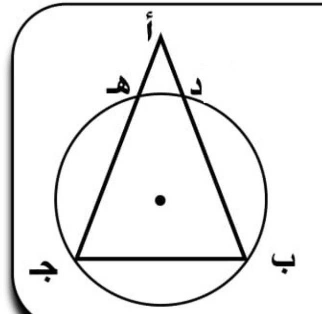
أوجد: ق (أ ب^ هـ)

الحل

....



٧



أ ب جـ Δ فيه

أ ب = أ جـ

اثبت أن :

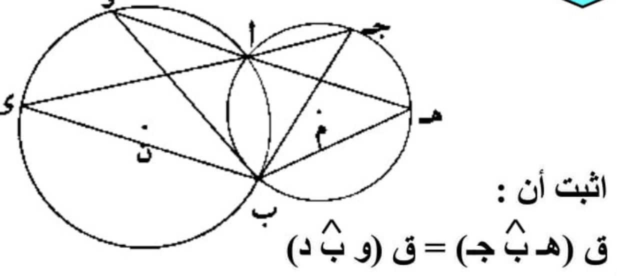
ق $(\overset{\frown}{\text{د ب}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{هـ جـ}})$

الحل

....



٨



اثبت أن :

ق (هـ ب^ جـ) = ق (و ب^ د)

الحل

....

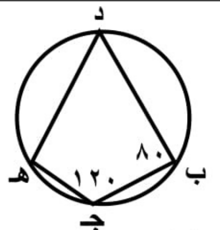
الشكل الرباعى الدائرى

إعداد / محمود عوض

الشكل الرباعى الدائرى : هو شكل رباعى تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة .
أي يمكن رسم دائرة واحدة تمر برؤوسه الأربعة

لو عرفت ان الشكل رباعى دائرى (سواء هو قالك فى المسألة أو لقيت رؤوسه الأربعة تقع على الدائرة) استنتج ٣ حاجات :

كل زاويتان متقابلتان مجموعهما = ١٨٠°



∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

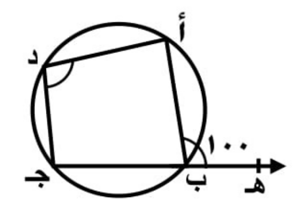
∴ ق (بَ) + ق (هـَ) = ١٨٠°

، ق (دَ) + ق (جـَ) = ١٨٠°

∴ ق (دَ) = ١٨٠ – ١٢٠ = ٦٠°

ق (هـَ) = ١٨٠ – ٨٠ = ١٠٠°

قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

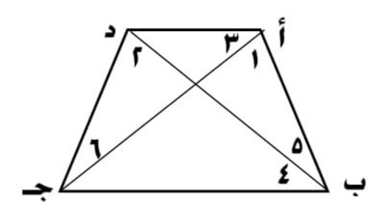


∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق (أ بَ هـ) الخارجة = ق (دَ)

∴ ق (دَ) = ١٠٠°

أي زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان



إذا كان أ ب جـ د رباعى دائرىفإن:

ق(١َ) = ق (٢َ) مرسومتان على ب جـ

ق(٣َ) = ق (٤َ) مرسومتان على د جـ

ق(٥َ) = ق (٦َ) مرسومتان على أ د

مثال ١ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، ق (جـَ) = ٧٠° ،

ق (أ دَ ب) = ٣٠°

أوجد : ق (أ بَ د)

الحل

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق (أَ) + ق (جـَ) = ١٨٠°

∴ ق (أَ) = ١٨٠ – ٧٠ = ١١٠°

في ∆ أ ب د :

ق (أ بَ د) = ١٨٠ – (١١٠ + ٣٠) = ٤٠°

مثال ٢ في الشكل المقابل :

هـ ∈ أ ب

ق (⌒أ ب) = ١١٠°

ق (جـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد ق (ب دَ جـ)

الحل

∵ ق (⌒أ ب) = ١١٠°

∴ ق (ب دَ أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أ ب) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

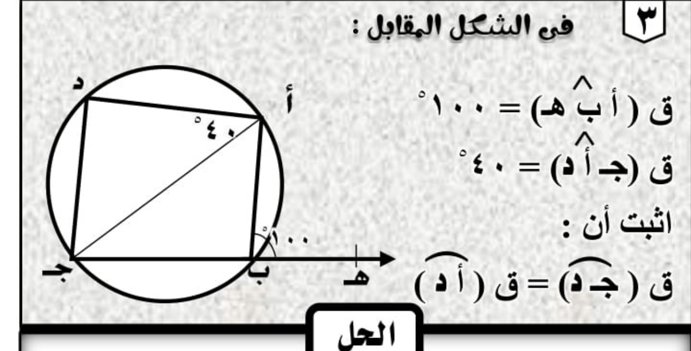
∵ جـ بَ هـ خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ د

∴ ق (جـ دَ أ) = ق (جـ بَ هـ) = ٨٥°

∴ ق (ب دَ جـ) = ق (جـ دَ أ) – ق (ب دَ أ)

= ٨٥ – ٥٥ = ٣٠°

٣ في الشكل المقابل :



ق (أ بَ هـ) = ١٠٠°
ق (جـ أَ د) = ٤٠°
اثبت أن :
ق (جـ د) = ق (أ د)

الحل

∵ أ بَ هـ زاوية خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ د
∴ ق (دَ) = ق (أ بَ هـ) = ١٠٠°

في Δ أ د جـ :
ق (أ جـَ د) = ١٨٠ – (١٠٠ + ٤٠) = ٤٠°
∵ ق(د أَ جـ) = ق (أ جـَ د) = ٤٠
∴ أ د = د جـ
∴ ق(جـ د) = ق (أ د)
هـ ط ث

٤ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م
جـ ب = جـ د
ق (ب جـَ د) = ١٤٠°
أوجد: ١- ق (أَ) ٢- ق (دَ)

الحل

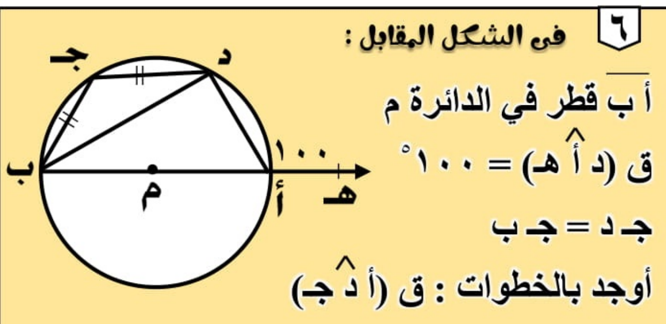
العمل نرسم ب د
∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى
∴ ق (أَ) + ق (جـَ) = ١٨٠°
∴ ق (أَ) = ١٨٠ – ١٤٠ = ٤٠° **المطلوب الأول**

في Δ جـ ب د :
∵ جـ ب = جـ د ∴ ق(جـ دَ ب) = ق (جـ بَ د)
∴ ق (جـ دَ ب) = $\frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢}$ = ٢٠°
∵ ق (أ دَ ب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة
∴ ق(دَ) = ٢٠ + ٩٠ = ١١٠°

٥ في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م
ق (أ جـَ د) = ١١٥°
أوجد بالبرهان : ق (د أَ ب)

٦ في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م
ق (د أَ هـ) = ١٠٠°
جـ د = جـ ب
أوجد بالخطوات : ق (أ دَ جـ)



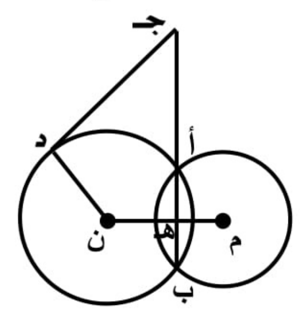
إثبات أن الشكل رباعى دائرى

لو قالك اثبت أن الشكل رباعى دائرى إبحث عن إحدى الحالات الثلاثة الآتية واثبتها :

زاويتان متقابلتان
واثبت أن :
مجموعهما = ١٨٠

مثال لزيز

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : جـ هـ ن د رباعى دائرى



طريقة الحل

في الشكل جـ هـ ن د

ق ($\hat{د}$) = ٩٠° عشان المماس

ق ($\hat{هـ}$) = ٩٠° عشان الوتر المشترك

و الزاويتين د ، هـ متقابلتين

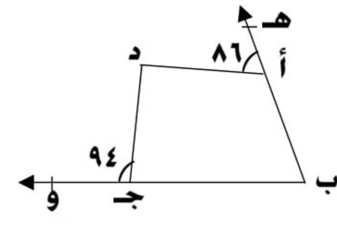
ولو جمعناهم = ١٨٠°

∴ الشكل رباعى دائرى

زاوية خارجة قياسها = قياس المقابلة للمجاورة

مثال لزيز

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : أ ب جـ د رباعى دائرى



طريقة الحل

شايف الزاوية ٩٤ ؟

هي واللى جنبها زاوية مستقيمة

∴ق (د $\hat{جـ}$ ب) = ١٨٠ - ٩٤ = ٨٦

كده ظهر لينا زاويتين متساويتين الخارجة = المقابلة للمجاورة

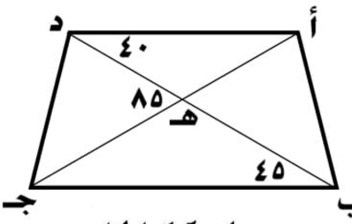
وهما ق(هـ $\hat{أ}$ د) = ق(د $\hat{جـ}$ ب)

∴ الشكل رباعى دائرى

زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ومتساويتان

مثال لزيز

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : أ ب جـ د رباعى دائرى



طريقة الحل

شايف الزاوية ٨٥ ؟

دى خارجة عن Δ هـ ب جـ

∴ق (هـ $\hat{جـ}$ ب) = ٨٥ - ٤٥ = ٤٠°

كده ظهر لينا زاويتين متساويتين ومرسومتين على قاعدة واحدة

وهما ق(أ $\hat{د}$ ب) = ق(أ $\hat{جـ}$ ب)

∴ الشكل رباعى دائرى

سؤال مهم :

اذكر ٣ حالات يكون فيها الشكل الرباعى دائرياً ؟

الإجابة :

١- إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان

٢- إذا وجد زاوية خارجة قياسها = المقابلة للمجاورة

٣- إذا وجد زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ومتساويتان

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

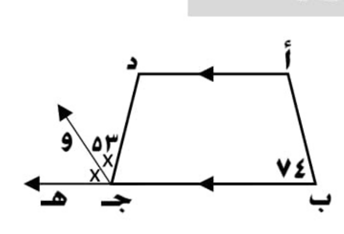
أ د // ب جـ

جـ و ينصف د $\hat{جـ}$ هـ

ق (د $\hat{جـ}$ و) = ٥٣°

ق($\hat{ب}$) = ٧٤°

اثبت أن: أ ب جـ د رباعى دائرى



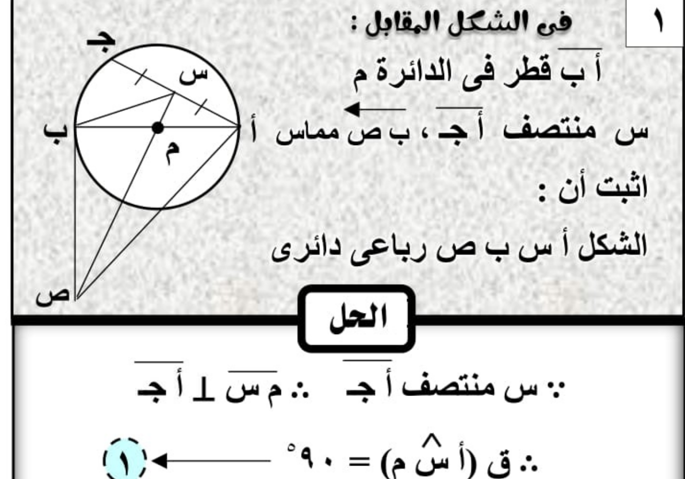
١ فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة م

س منتصف أ جـ ، ب ص مماس

اثبت أن :

الشكل أ س ب ص رباعى دائرى



الحل

∵ س منتصف أ جـ ∴ م س ⊥ أ جـ

∴ ق (أ س^ م) = ٩٠° ← (١)

∵ ب ص مماس ، أ ب قطر ∴ أ ب ⊥ ب ص

∴ ق (م ب^ ص) = ٩٠° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (أ س^ ص) = ق (أ ب^ ص)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى أ ص وفى جهة واحدة منها

∴ أ س ب ص رباعى دائرى

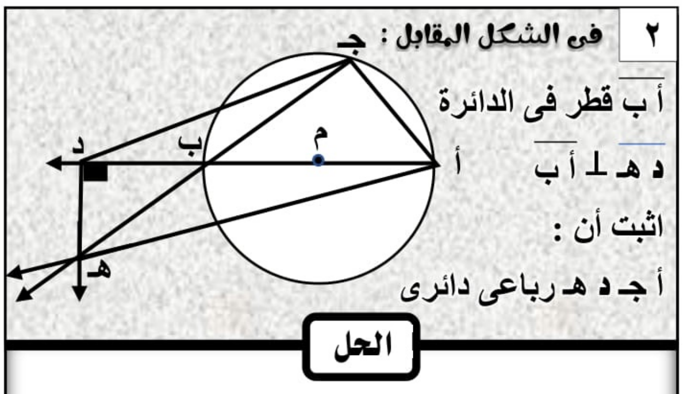
٢ فى الشكل المقابل :

أ ب قطر فى الدائرة

د هـ ⊥ أ ب

اثبت أن :

أ جـ د هـ رباعى دائرى



الحل

∵ د هـ ⊥ أ د ∴ ق (أ د^ هـ) = ٩٠° ← (١)

∵ أ جـ^ ب محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ ق (أ جـ^ ب) = ٩٠° ← (٢)

من ١ ، ٢ نلاحظ: ق (أ د^ هـ) = ق (أ جـ^ هـ)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى أ هـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ جـ د هـ رباعى دائرى



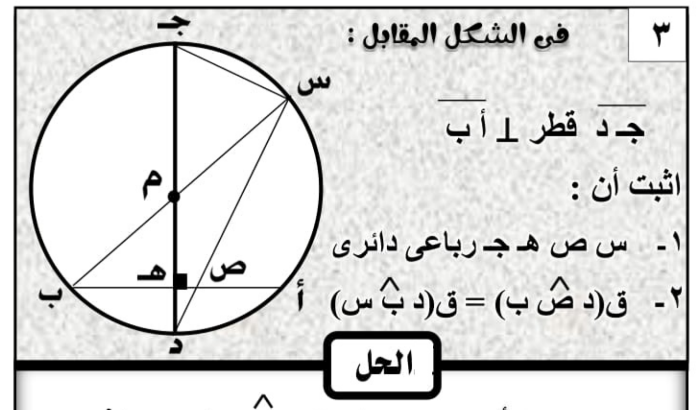
٣ فى الشكل المقابل :

جـ د قطر ⊥ أ ب

اثبت أن :

١- س ص هـ جـ رباعى دائرى

٢- ق(د ص^ ب) = ق(د ب^ س)



الحل

∵ جـ د ⊥ أ ب ∴ ق (جـ هـ^ ص) = ٩٠°

∵ ق (جـ س^ د) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ ق (جـ هـ^ ص) + ق (جـ س^ د) = ١٨٠° (متقابلتان متكاملتان)

∴ س ص هـ جـ رباعى دائرى **المطلوب الأول**

∵ ق (د ص^ ب) = ق (جـ^) ← (١)

لأن قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∵ ق(د ب^ س) = ق (جـ^) ← (٢)

لأنهما محيطيتان مشتركتان في س د

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق(د ص^ ب) = ق (د ب^ س)

٤ فى الشكل المقابل : **مهمة**

أ ب = أ جـ ،

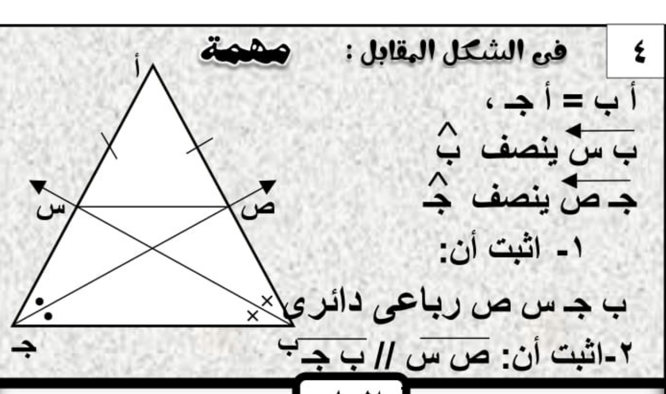
ب س ينصف ب^

جـ ص ينصف جـ^

١- اثبت أن:

ب جـ س ص رباعى دائرى

٢-اثبت أن: ص س // ب جـ



الحل

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق (ب^) = ق (جـ^)

∴ ١/٢ ق (ب^) = ١/٢ ق (جـ^)

∴ ق (ص ب^ س) = ق (ص جـ^ س)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة

∴ ب جـ س ص رباعى دائرى **المطلوب الأول**

∵ ب جـ س ص رباعى دائرى

∴ ق(أ ص^ س) الخارجة = ق(جـ^) المقابلة للمجاورة

∴ ق (أ ص^ س) = ق (ب^) وهما في وضع تناظر

∴ ص س // ب جـ

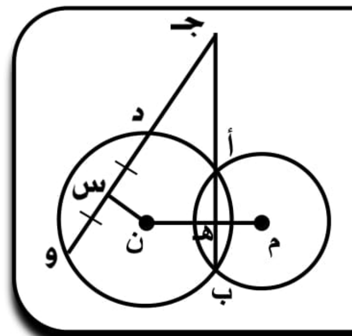


١) م ، ن دائرتان متقاطعتان

س منتصف $\overline{د و}$

اثبت أن :الشكل

جـ هـ ن س رباعى دائرى



الحل

....

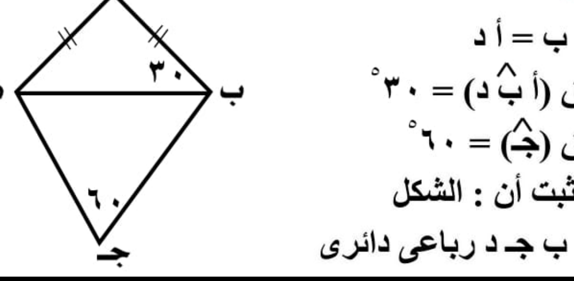
٢) أ ب = أ د

ق (أ $\hat{ب}$ د) = ٣٠°

ق ($\hat{جـ}$) = ٦٠°

اثبت أن : الشكل

أ ب جـ د رباعى دائرى



الحل

....

٣) $\overrightarrow{أ س}$ ينصف ∠ ب أ جـ

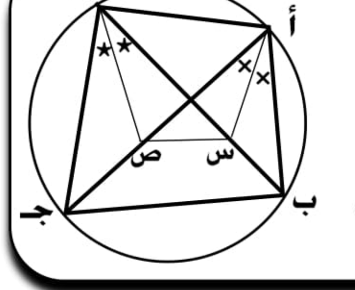
$\overrightarrow{د ص}$ ينصف ∠ ب د جـ

اثبت أن : الشكل

١) أ س ص د رباعى دائرى

٢) $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$





الحل

....

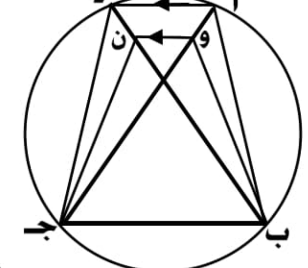
٤) $\overline{أ د}$ // $\overline{و ن}$

اثبت أن :

١) ب و ن جـ رباعى دائرى

٢) ق (و ب ن) = ق (و جـ ن)





الحل

....

تمارين على الرباعى الدائرى

إعداد / محمود عوض

(١) فى الشكل المقابل :

س منتصف ص⌒ل

ق (ص ع^ ن) = ٨٠

ق(ص ل^ ع) = ٢٠

أوجد : ١) ق (ع س^ ل)

٢) ق (س⌒ص ع)

(٢) فى الشكل المقابل :

ق (ب^) = ٧٠°

ق (جـ^) = ٨٠°

ق (د^) = ص

ق (أ^) = س + ٢٠

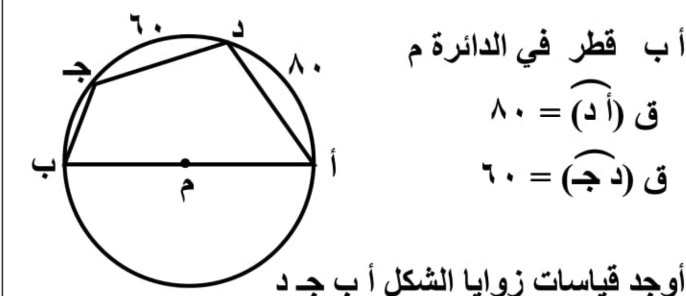
أوجد قيمتى س ، ص

(٣) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

ق (أ⌒د) = ٨٠

ق (د⌒جـ) = ٦٠



أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب جـ د

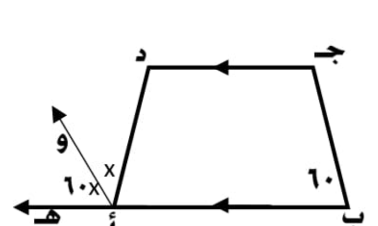
(٤) فى الشكل المقابل :

جـ د // ب هـ

أ و ينصف ∠ د أ هـ

ق (و أ^ هـ) = ٦٠°

ق(ب^) = ٦٠°

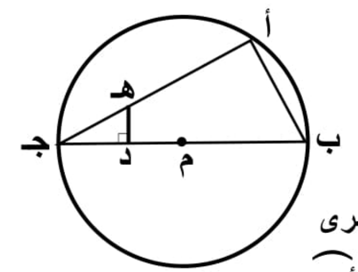
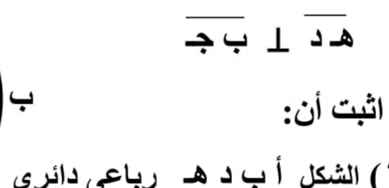
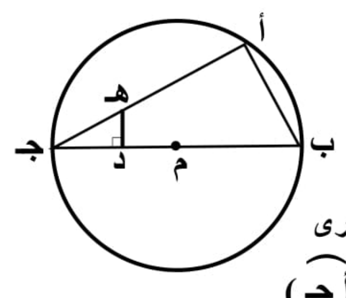


اثبت أن: الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

(٥) فى الشكل المقابل :

ب جـ قطر في الدائرة م

هـ د ⊥ ب جـ

اثبت أن:

١) الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى

٢) ق (د هـ^ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (أ⌒جـ)

(٦) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متقاطعتان في جـ ، د

أ ب مماس للدائرة م عند ب

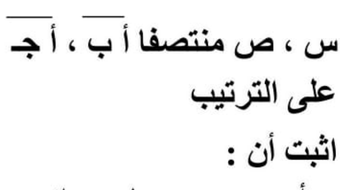
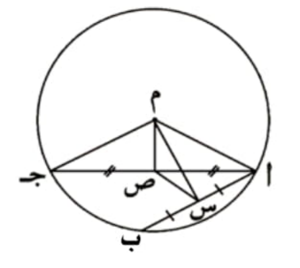
م ن ∩ جـ د = { هـ }

اثبت أن :

الشكل أ ب م هـ رباعى دائرى

(٧) فى الشكل المقابل :

س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

اثبت أن :

أ س ص م رباعى دائرى

(٨) فى الشكل المقابل :

أ د = أ ب

ق (أ ب^ د) = ٣٠

ق (د جـ^ هـ) = ١٢٠

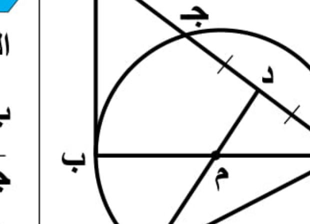
اثبت أن : الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

(٩) فى الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

د منتصف أ جـ

ب و مماس



اثبت أن: ١) م ب و د رباعى دائرى

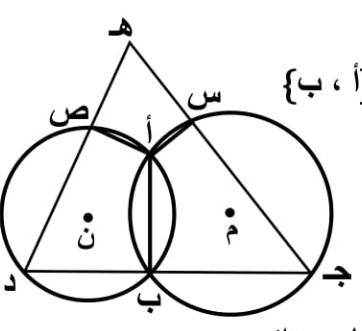
٢) ق (و^) = ٢ ق (هـ^)

(١٠) فى الشكل المقابل :

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

ب جـ د

جـ س ∩ د ص = { هـ }



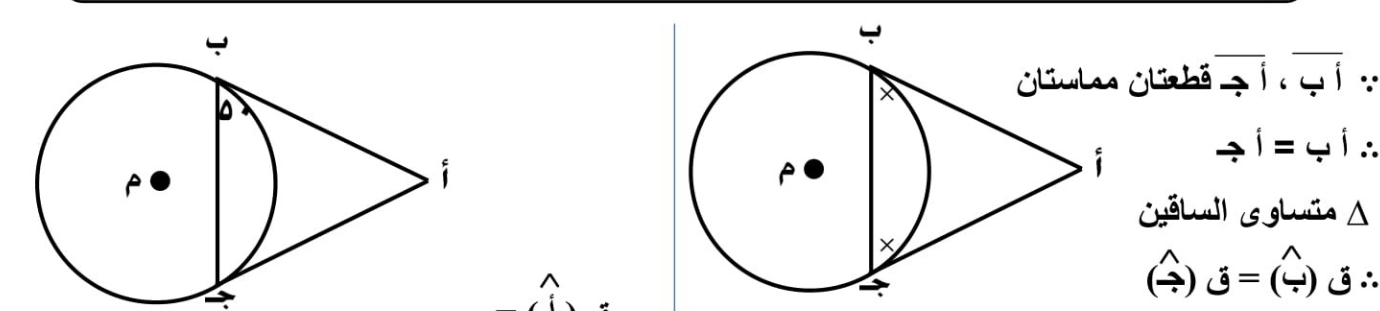
اثبت أن

الشكل أ س هـ ص رباعى دائرى



العلاقة بين مماسات الدائرة

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان في الطول.



∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان

∴ أب = أجـ

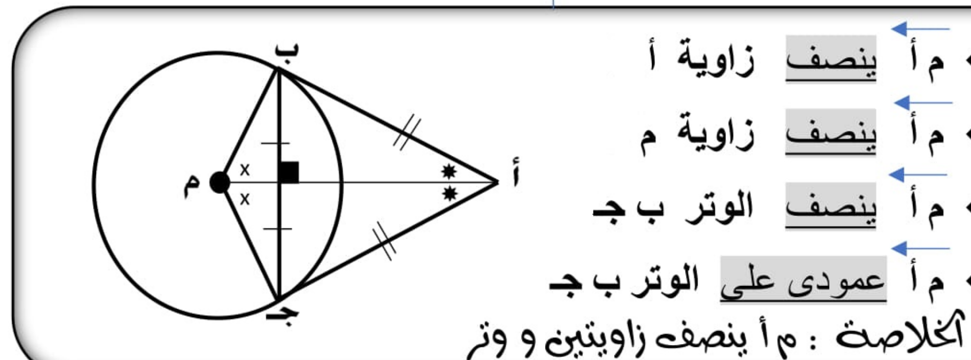
△ متساوى الساقين

∴ ق (ب^) = ق (جـ^)

ق (أ^) = ...

ملاحظة هامة





الخلاصة : م أ ينصف زاويتين و وتر

مثال ١

أب ، أجـ قطعتان مماستان

ق (ب أ^ جـ) = ٢٥°

أوجد : ق (ب م^ جـ)

ب
م
أ
٢٥
جـ

الحل

∵ أب مماسة ، ب م نصف قطر ∴ ق (أ ب^ م) = ٩٠°

في △ أ ب م :

ق (أ م ب^) = ١٨٠ – (٣٥+٩٠) = ٥٥°

∵ م أ ينصف ∠ ب م جـ

∴ ق (ب م^ جـ) = ٥٥ × ٢ = ١١٠°

مثال ٢

△ أ ب جـ يمس الدائرة

من الخارج في س ، ص ، ع

أ س = ٥سم ، ب ص = ٤سم

جـ ع = ٣ سم

أوجد محيط △ أ ب جـ

أ
٥سم
س
ع
٣سم
ب
جـ
٤سم

الحل

أ س = أ ع = ٥ سم قطعتان مماستان

ب ص = ب س = ٤ سم قطعتان مماستان

جـ ع = جـ ص = ٣٥ سم قطعتان مماستان

أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، ب جـ = ٤ + ٣ = ٧ سم

أ جـ = ٥ + ٣ = ٨ سم **المحيط** = ٩ + ٧ + ٨ = ٢٤ سم

عدد المماسات المشتركة

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ٤

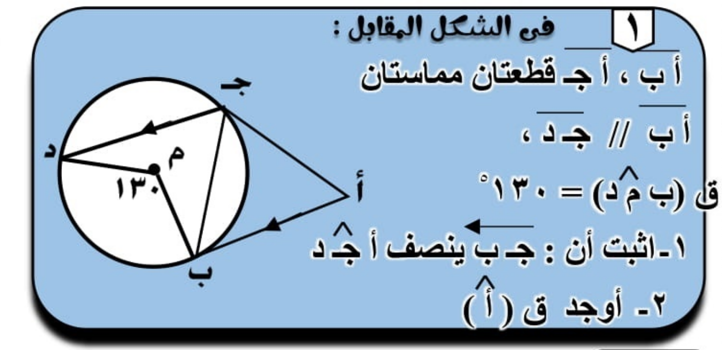
❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج ٣

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين ٢

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل ١

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متحدتا المركز صفر

❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتان صفر



١ في الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

أ ب // جـ د ،

ق (ب م̂ د) = ١٣٠°

١- اثبت أن : جـ ب ينصف أ جـ̂ د

٢- أوجد ق (أ̂)

الحل

∵ ق (ب جـ̂ د) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م̂) المركزية

∴ ق(ب جـ̂ د) = ٦٥°

∵ أ ب // جـ د

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (ب جـ̂ د) = ٦٥° بالتبادل ← (١)

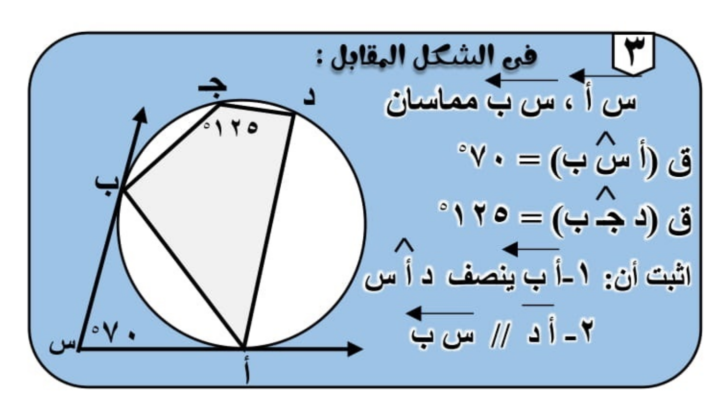
∵ أ ب = ب جـ (قطعتان مماستان)

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب) = ٦٥° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (ب جـ̂ د) = ق (أ جـ̂ ب)

∴ جـ ب ينصف أ جـ̂ د **المطلوب الأول**

ق (أ̂) = ١٨٠ – (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°



٣ في الشكل المقابل :

س أ ، س ب مماسان

ق (أ س̂ ب) = ٧٠°

ق (د جـ̂ ب) = ١٢٥°

اثبت أن: ١- أ ب ينصف د أ̂ س

٢- أ د // س ب

الحل

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى ∴ ق (جـ̂) + ق (د أ̂ ب) = ١٨٠

∴ ق (د أ̂ ب) = ١٨٠ – ١٢٥ = ٥٥° ← (١)

∵ س أ ، س ب مماستان للدائرة ∴ س أ = س ب

∴ Δ س أ ب متساوى الساقين

∴ ق (س أ̂ ب) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق(د أ̂ ب) = ق (س أ̂ ب)

∴ أ ب ينصف د أ̂ س **المطلوب الأول**

∵ ق (د أ̂ س) = ٥٥ + ٥٥ = ١١٠°

∴ ق(د أ̂ س) + ق(س̂) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠ وهما متداخلتان

∴ أ د // س ب

٢ في الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (ب أ̂ م) = ٢٥°

هـ ∈ ب جـ الأكبر

أوجد: ١- ق (أ جـ̂ ب)

٢- ق (ب هـ̂ جـ)

الحل

∵ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان ∴ أ م ينصف أ̂

∴ ق (أ̂) = ٢ × ٢٥ = ٥٠°

في Δ أ جـ ب : ق (أ جـ̂ ب) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥° **اولا**

∵ أ جـ مماسة ، م جـ نصف قطر ∴ م جـ ⊥ أ جـ

∴ ق (أ جـ̂ م) = ٩٠°

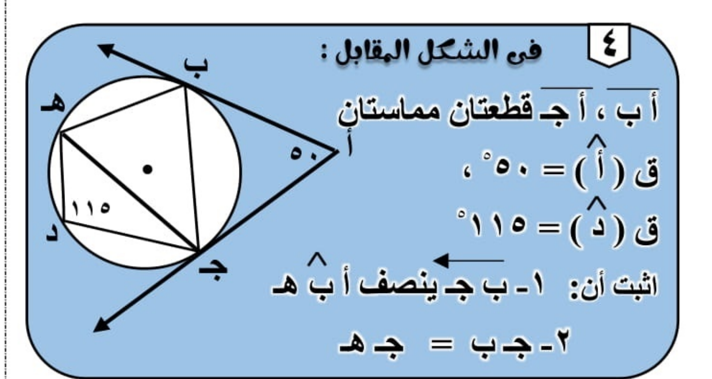
كذلك ∵ أ ب مماسة ، م ب نصف قطر ∴ م ب ⊥ أ ب

∴ ق (أ ب̂ م) = ٩٠°

في الشكل الرباعى أ ب م جـ

ق (جـ م̂ ب) = ٣٦٠ – (٥٠ + ٩٠ + ٩٠) = ١٣٠°

∴ ق (ب هـ̂ جـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب م̂ جـ) المركزية = ٦٥°



٤ في الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (أ̂) = ٥٠° ،

ق (د̂) = ١١٥°

اثبت أن: ١- ب جـ ينصف أ ب̂ هـ

٢- جـ ب = جـ هـ

الحل

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان

∴ ق (أ ب̂ جـ) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥° ← (١)

∵ ب جـ د هـ رباعى دائرى

∴ ق (جـ ب̂ هـ) = ١٨٠ – ١١٥ = ٦٥° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (أ ب̂ جـ) = ق (جـ ب̂ هـ) ← (٣)

∴ ب جـ ينصف أ ب هـ **المطلوب الأول**

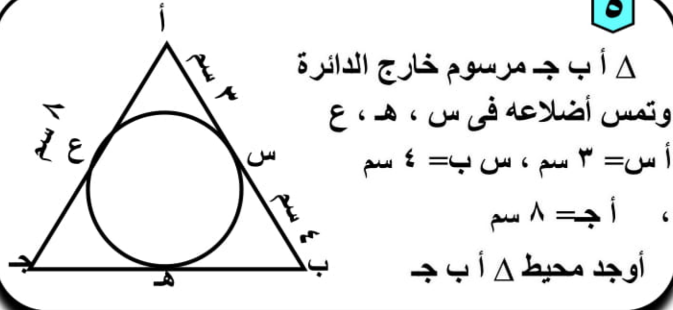
∵ ق (أ ب̂ جـ) المماسية = ق (جـ هـ̂ ب) المحيطية ← (٤)

من ٣ ، ٤ ينتج أن : ق (جـ ب̂ هـ) = ق (جـ هـ̂ ب)

∴ جـ ب = جـ هـ **المطلوب الثانى**

٥

∆ أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة وتمس أضلاعه فى س ، هـ ، ع
أ س = ٣ سم ، س ب = ٤ سم ، أ جـ = ٨ سم
أوجد محيط ∆ أ ب جـ



الحل

∵ أ س = أ ع قطعتان مماستان
∴ أ ع = ٣ سم
∴ ع جـ = ٨ ـ ٤ = ٥ سم
∵ جـ ع = جـ هـ قطعتان مماستان
∴ جـ هـ = ٥ سم
∵ ب هـ = ب س قطعتان مماستان
∴ ب هـ = ٤ سم
∴ ب جـ = ٤ + ٥ = ٩ سم
∴ محيط = ٧ + ٨ + ٩ = ٢٤ سم

٦

م ، ن دائرتان متماستان في د
د جـ مماس مشترك عند د
أ ب مماس مشترك عند أ ، ب
اثبت أن: ١) جـ منتصف أ ب
٢) أ د ⊥ ب د

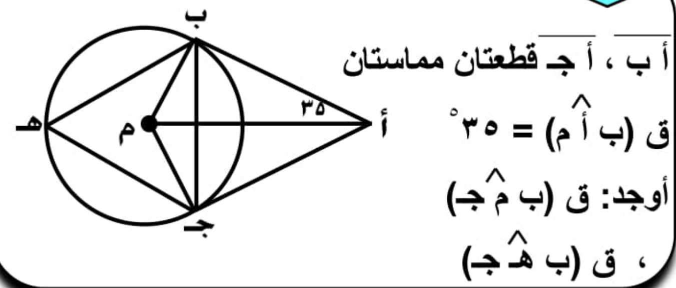
الحل

في الدائرة م ∵ جـ د ، جـ أ قطعتان مماستان
∴ جـ د = جـ أ ← (١)
في الدائرة ن ∵ جـ د ، جـ ب قطعتان مماستان
∴ جـ د = جـ ب ← (٢)
من ١ ، ٢ ينتج أن: جـ أ = جـ ب
∴ جـ منتصف أ ب **المطلوب الأول**
في ∆ أ د ب : ∵ جـ منتصف أ ب ∴ د جـ متوسط
∵ د جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب ∴ د جـ خارج من زاوية قائمة
∴ أ د ⊥ ب د **المطلوب الثانى**



٧

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان
ق (ب أ م) = ٣٥°
أوجد: ق (ب م جـ) ، ق (ب هـ جـ)

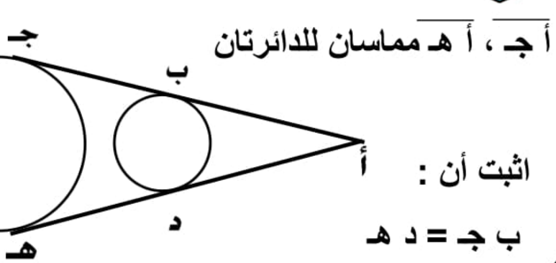


الحل

....

٨

أ جـ ، أ هـ مماسان للدائرتان
اثبت أن : ب جـ = د هـ



الحل

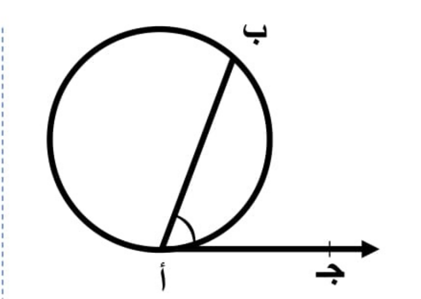
....

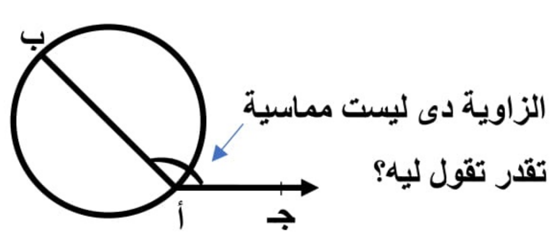
الزاوية المماسية

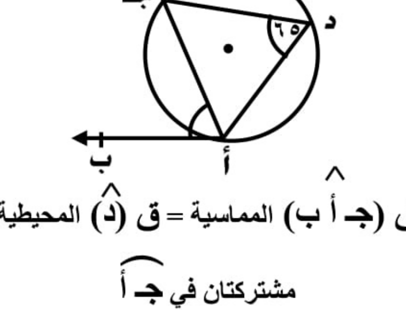


الزاوية المماسية هي زاوية رأسها على الدائرة ومحصورة بين وتر ومماس

- ب أ جـ زاوية مماسية
- القوس المقابل لها هو $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$



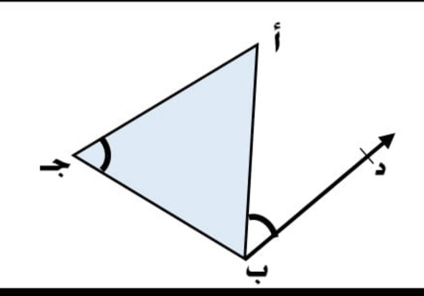


قياس الزاوية المماسية = **نصف قياس القوس المقابل لها** زى المحيطية بالظبط	قياس الزاوية المماسية = **قياس الزاوية المحيطية** المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = **نصف قياس الزاوية المركزية** المشتركة معها في القوس
ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) ∴ ق(أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٧٠°	ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) المماسية = ق ($\hat{\text{د}}$) المحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$ ∴ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٦٥°	ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{\text{م}}$) المركزية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$ ∴ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٤٩°

لإثبات أن $\overleftarrow{\text{ب د}}$ مماس للدائرة التي تمر برؤوس $\triangle$ أ ب جـ

نثبت أن :

ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق ($\hat{\text{جـ}}$)



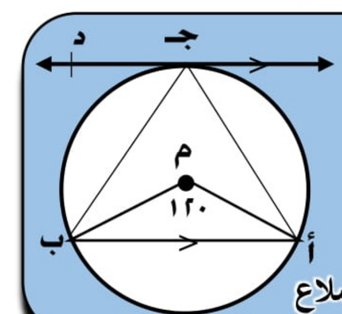
جـ د مماس للدائرة عند جـ

جـ د // أ ب

ق (أ م ب) = ١٢٠°

اثبت أن :

Δ جـ أ ب متساوى الأضلاع



الحل

∵ جـ د // أ ب

∴ ق (د جـ ب) = ق (جـ ب أ) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (د جـ ب) المماسية = ق (جـ أ ب) المحيطية ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (جـ ب أ) = ق (جـ أ ب)

∴ Δ جـ أ ب متساوى الساقين

∵ ق (م) المركزية = ١٢٠° ∴ ق (أ جـ ب) = ٦٠°

∴ Δ جـ أ ب متساوى الأضلاع

أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة

س ص // ب د

اثبت أن :

أ س ص جـ رباعى دائرى

الحل

∵ س ص // ب د

∴ ق (أ ب د) = ق (ص س ب) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (أ ب د) المماسية = ق (جـ) المحيطية ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (ص س ب) = ق (جـ)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى

٣ فى الشكل المقابل :

أ س مماس مشترك

لدائرتين متماستين

اثبت أن :

ب د // جـ هـ

الحل

فى الدائرة الصغرى :

∵ ق (س أ ب) المماسية = ق (أ د ب) المحيطية ⟵ (١)

مشتركتان في القوس أ ب

فى الدائرة الكبرى :

ق (س أ جـ) المماسية = ق (أ هـ جـ) المحيطية ⟵ (٢)

لأنهما مشتركتان في القوس أ جـ

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (أ د ب) = ق (أ هـ جـ) وهما في وضع تناظر

∴ ب د // جـ هـ

٤ فى الشكل المقابل :

جـ أ = جـ ب

ق (ب أ د) = ١٣٠°

ق (ب) = ٦٥°

اثبت أن: أ د

مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

الحل

∵ جـ أ = جـ ب

∴ ق (جـ أ ب) = ق (ب) = ٦٥°

∴ ق (د أ جـ) = ١٣٠ ـ ٦٥ = ٦٥°

∴ ق (د أ جـ) = ق (ب)

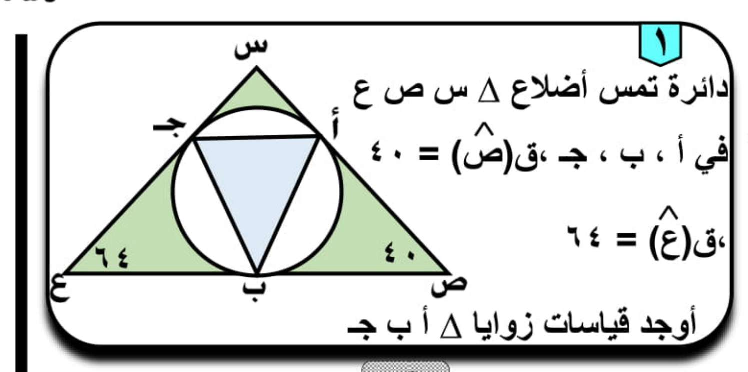
∴ أ د مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

١

دائرة تمس أضلاع $\triangle$ س ص ع

في أ ، ب ، جـ ،ق($\hat{ص}$) = ٤٠

،ق($\hat{ع}$) = ٦٤



أوجد قياسات زوايا $\triangle$ أ ب جـ

الحل

٢

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ب جـ = ب د

ق ($\hat{أ}$) = ٧٠°

أوجد: ق (أ $\hat{ب}$ د)

الحل

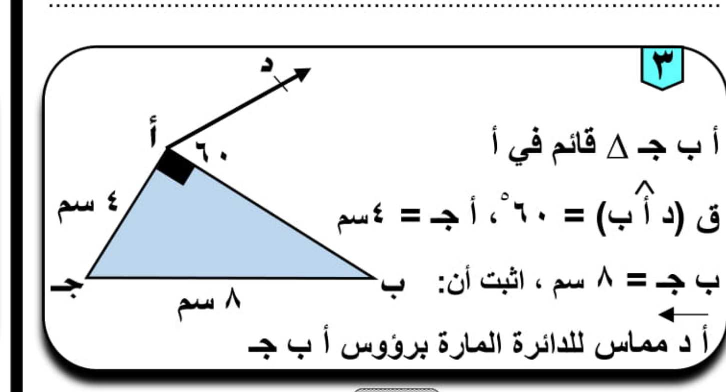
٣

أ ب جـ $\triangle$ قائم في أ

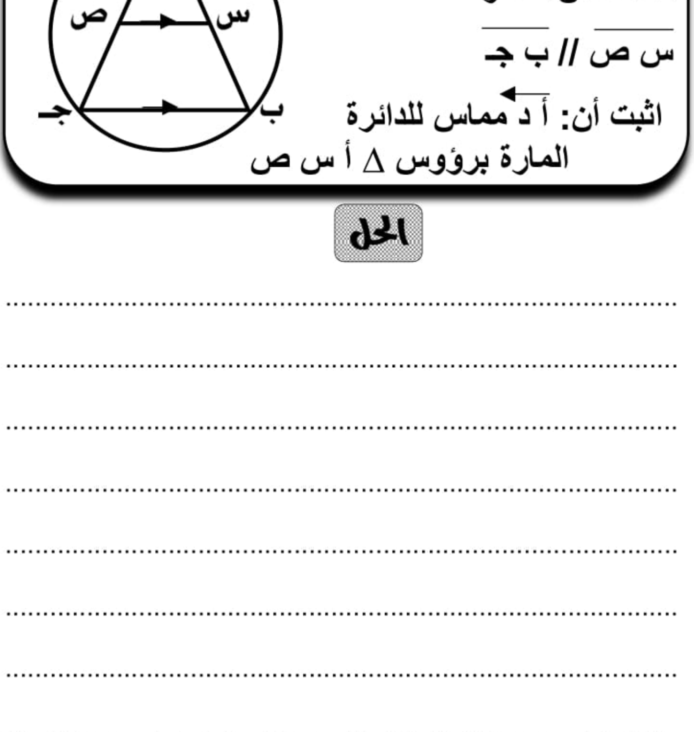
ق (د $\hat{أ}$ ب) = ٦٠°، أ جـ = ٤سم

ب جـ = ٨ سم ، اثبت أن:

$\overleftarrow{أ د}$ مماس للدائرة المارة برؤوس أ ب جـ



الحل



٤

أ ب جـ $\triangle$ مرسوم داخل دائرة

$\overleftrightarrow{أ د}$ مماس للدائرة

$\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$

اثبت أن: $\overleftarrow{أ د}$ مماس للدائرة

المارة برؤوس $\triangle$ أ س ص

الحل

أسئلة اختر على الهندسة

١ عدد محاور التماثل لأى دائرة هو ....

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) عدد لا نهائي

٢ عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو ....

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) عدد لا نهائي

٣ وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٥ د) ٨

٤ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = Φ فإن المستقيم ل يكون ....

أ) محور تماثل ب) خارج جـ) قاطع د) مماس

٥ إذا كان المستقيم مماسا للدائرة التي قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٦ د) ٨

٦ دائرة محيطها ٦ π سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم ل يكون ....

أ) مماس للدائرة ب) قاطع للدائرة جـ) خارج الدائرة د) قطر في الدائرة

٧ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على .... وينصفه

أ) القطر ب) الوتر جـ) الوتر المشترك د) المماس

٨ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، أنصاف أقطارهم ٥ سم ، ٩ سم فإن م ن = ... سم

أ) ١٤ ب) ٤ جـ) ٥ د) ٩

٩ م ، ن دائرتان متقاطعتان وطولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن م ن ∋ ....

أ)] ٣ ، ٧ [ب) [٣ ، ٧] جـ)] ٣ ، ٧ [د) [٣ ، ٧]

١٠ إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = ... سم

أ) ٥ ب) ٦ جـ) ١١ د) ١٦

١١ إذا كان الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم ، م ن = ٩ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = ... سم

أ) ٤ ب) ٥ جـ) ٩ د) ١٤

١٢ م دائرة طول قطرها ٧ سم ، أ نقطة في مستوى الدائرة وكان م أ = ٤ سم فإن أ تقع ....

أ) داخل الدائرة ب) خارج الدائرة جـ) على الدائرة د) على مركز الدائرة

١٣ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو . . . .

أ) **صفر** ب) **١** جـ) **٢** د) **٣**

١٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

أ) **المثلث** ب) **المربع** جـ) **المعين** د) **المستطيل**

١٥ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

أ) **معين** ب) **مستطيل** جـ) **شبه منحرف** د) **متوازى أضلاع**

١٦ مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع . . . .

أ) **متوسطات المثلث** ب) **ارتفاعات المثلث** جـ) **محاور تماثل أضلاعه** د) **منصفات زواياه الداخلة**

١٧ مركز الدائرة الخارجة لأى مثلث هو نقطة تقاطع . . . .

أ) **متوسطات المثلث** ب) **ارتفاعات المثلث** جـ) **محاور تماثل أضلاعه** د) **منصفات زواياه الداخلة**

١٨ قياس القوس الذى يمثل ثلث قياس الدائرة = ...

أ) **٣٦٠** ب) **١٨٠** جـ) **١٢٠** د) **٩٠**

١٩ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس = ...

أ) **١ : ٢** ب) **١ : ٣** جـ) **٢ : ١** د) **٣ : ١**

٢٠ طول تصف الدائرة التي طول نصف قطرها نق سم = ... سم

أ) **٢ π نق** ب) **$\frac{1}{4}$ π نق** جـ) **$\frac{1}{3}$ π نق** د) **π نق**

٢١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = ...

أ) **٤٥°** ب) **٩٠°** جـ) **١٢٠°** د) **١٨٠°**

٢٢ أ ب جـ د شكل رباعى دائرى فيه ق (أ) = ٦٠° فإن ق (جـ) = ...

أ) **٦٠°** ب) **٣٠°** جـ) **٩٠°** د) **١٢٠°**

٢٣ إذا كان الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى وكان ق ($\hat{أ}$) = $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{جـ}$) فإن ق ($\hat{أ}$) = ...

أ) **٩٠°** ب) **٦٠°** جـ) **١٢٠°** د) **١٨٠°**

٢٤ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج = ...

أ) **صفر** ب) **١** جـ) **٢** د) **٣**

٢٥ المماسان المرسومان من نهايتى قطر في دائرة يكونان ....

أ) **متوازيان** ب) **منطبقان** جـ) **متقاطعان** د) **متساويان في الطول**

٢٦ الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين ....

أ) وتران ب) مماسان جـ) وتر ومماس د) وتر و قطر

٢٧ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتان هو ....

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

٢٨ الزاوية المحيطية التي تقابل قوسا أصغر في الدائرة تكون ....

أ) منعكسة ب) قائمة جـ) منفرجة د) حادة

٢٩ الشكل الرباعى الدائرى في الأشكال التالية هو ....

أ) المعين ب) المستطيل جـ) متوازى الأضلاع د) شبه المنحرف

محمود عوض

معلم أول رياضيات

أسئلة اختر على الرسومات

١ **في الشكل المقابل** : $\overleftarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م

م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم فإن أ م = ... سم

أ) ٥ ب) ١٠ جـ) ١٢ د) ١٣

٢ **في الشكل المقابل** : دائرة مركزها م

إذا كان ق $(\overset{\frown}{أ ب})$ = ٥٠° فإن ق $(\hat{أ د ب})$ = ...

أ) ٢٥° ب) ٥٠° جـ) ١٠٠° د) ١٥٠°

٣ **في الشكل المقابل** : دائرة مركزها م

ق (م $\hat{أ}$ ب) = ٥٠° فإن ق ($\hat{جـ}$) = ...

أ) ٥٠° ب) ٨٠° جـ) ٤٠° د) ٣٠°

٤ **في الشكل المقابل** : $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ د}$

ق $(\overset{\frown}{أ جـ})$ = ٣٠° فإن ق (ب $\hat{هـ}$ د) = ...

أ) ١٠° ب) ١٥° جـ) ٣٠° د) ٦٠°

٥ **في الشكل المقابل** : أ ب جـ Δ متساوى الأضلاع

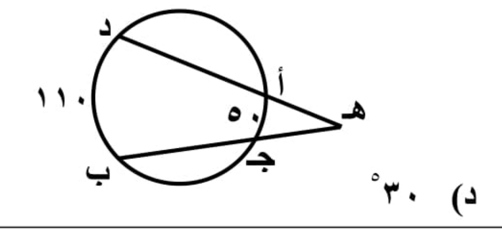
فإن ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ...

أ) ٥٠° ب) ٦٠° جـ) ١٢٠° د) ١٠٠°



في الشكل المقابل : ق (أجـ⌒) = ٥٠°،

ق (د ب⌒) = ١١٠°   فإن ق (هـ^) = ...

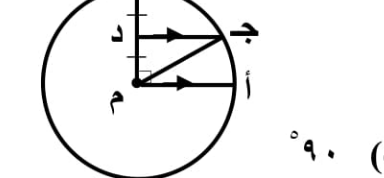


أ) ٦٠°   ب) ٥٠°   جـ) ٤٠°   د) ٣٠°

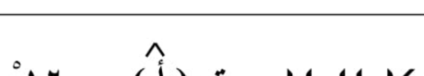


في الشكل المقابل : أم // جـ د ، م د = د ب

ق (أ م^ ب) = ٩٠°   فإن ق (أجـ⌒) = ...

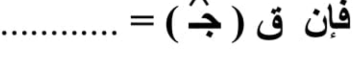


أ) ٤٥°   ب) ٦٠°   جـ) ٣٠°   د) ٩٠°

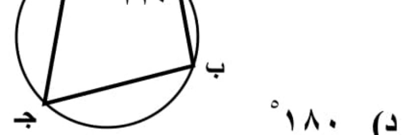




في الشكل المقابل : ق (أ^) = ١٢٠°



فإن ق (جـ^) = ...



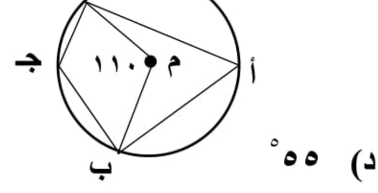
أ) ٦٠°   ب) ٩٠°   جـ) ١٢٠°   د) ١٨٠°



في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

ق (ب م^ د) = ١١٠°   فإن ق (جـ^) = ...





أ) ٧٠°   ب) ١١٠°   جـ) ١٢٥°   د) ٥٥°



في الشكل المقابل : أ ب جـ د شكل رباعى دائرى

فإن س = ...

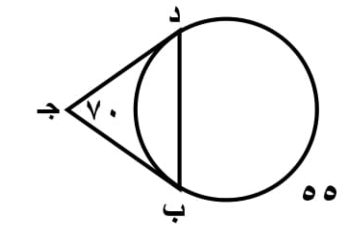


أ) ١٢٠   ب) ١٠٠   جـ) ٦٠   د) ٥٠



في الشكل المقابل : جـ ب ، جـ د قطعتان مماستان

ق (جـ) = ٧٠°   فإن ق(د ب) الأصغر = ...°

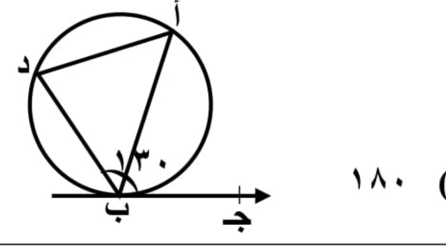


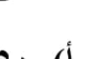
أ) ٧٠   ب) ١١٠   جـ) ١٢٥   د) ٥٥



في الشكل المقابل : ب جـ مماس للدائرة

ق (د ب^ جـ) = ١٣٠°   فإن ق(أ^) = ...°





أ) ٥٠   ب) ٦٥   جـ) ١٣٠   د) ١٨٠

تعالوا بينا نحل مسائل نماذج امتحانات الكتاب المدرسى اللى دايما بييجى منها في الامتحان عشان مهمة جدًا جدا و تعتبر أهم من مسلسل سلسال الدم



اختر تراكمى

١ مساحة المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم = ... سم٢

الحل: مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم٢

٢ مجموع طولى أي ضلعين في المثلث .... طول الضلع الثالث

٣ في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ = (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون ....

٤ في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ < (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون ....

٥ في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ < (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون ....

٦ قياس زاوية الشكل السداسى المنتظم = ...

٧ عدد محاور تماثل المربع = ... ، عدد محاور تماثل المستطيل = ...

٨ ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س − ٤ ص + ١٢ = ٠ هو ....

٩ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ...

١٠ عدد محاور تماثل نصف الدائرة .... عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين

١١ القطران المتساويان في الطول وغير متعامدان في ....

١٢ مربع محيطه ٢٠ سم تكون مساحته = ... سم٢

١٣ إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ (٣ ، −٥) ، ب (٥ ، ١) فإن مركز الدائرة م هو

١٤ دائرة محيطها ٨ π فإن طول قطرها = ...

١٥ في المثلث القائم طول المتوسط الخارج من الزاوية القائمة يساوى ....

١٦ في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى ....

١٧ عدد المستطيلات في الشكل المقابل ....

انتهت المذكرة مع تمنياتى الخالصة لكم بالتوفيق والنجاح والاستمرار في النجاح

حل مسائل نماذج الكتاب المدرسى



إعداد / محمود عوض حسن

١

أ ب قطر فى الدائرة م

ق (جـ أ ب) = ٣٠°

د منتصف أ جـ

١- أوجد ق(ب د جـ) ، ق (أ د)

٢- اثبت أن : أ ب // جـ د

الحل

∵ ق (ب د جـ) = ق (جـ أ ب)

محيطيتان مشتركتان في جـ ب

∴ ق (ب د جـ) = ٣٠° *أولا*

∴ ق(جـ ب) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

∵ ق (أ د جـ) + ق (جـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(أ د جـ) = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠°

∵ ق (أ د) = ق (د جـ) ∴ ق (أ د) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

∴ ق(د ب أ) المحيطية = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠°

∵ ق (ب د جـ) = ق (د ب أ) وهما متبادلتان ∴ أب//جـ د

٢

أ ب ، أجـ وتران متساويان فى الطول

س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

ق (جـ أ ب) = ٧٠°

١- أوجد ق (د م هـ)

٢- اثبت أن س د = ص هـ

الحل

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق (م س أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∴ ق (م ص أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى أ س م ص = ٣٦٠°

∴ ق (د م هـ) = ٣٦٠ – (٩٠ + ٩٠ + ٧٠) = ١١٠°

∵ أ جـ = أ ب (أوتار متساوية)

∴ م ص = م س (أبعاد متساوية) ← (١)

∵ م هـ = م د (أنصاف أقطار) ← (٢)

بطرح ١ من ٢ ينتج: ص هـ = س د *المطلوب الثانى*

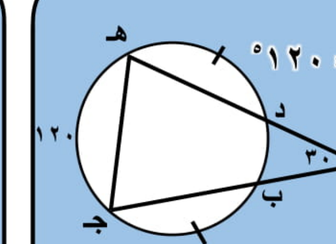
٣

ق (أ) = ٣٠° ، ق (هـ جـ) = ١٢٠°

ق (ب جـ) = ق (د هـ)

١-أوجد : ق (ب د) الأصغر

٢-اثبت أن : أ ب = أ د



الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق (ب د) = ق (هـ جـ) – ٢ ق(أ) = ١٢٠ – ٦٠ = ٦٠°

∵ ق (د هـ) = ق (ب جـ) بإضافة د ب للطرفين

∴ ق (ب د هـ) = ق (د ب جـ)

∴ ق (جـ) المحيطية = ق (هـ) المحيطية

∴ أ جـ = أ هـ ← (١)

∵، ق (د هـ) = ق (ب جـ) ∴ دهـ = ب جـ ← (٢)

بطرح ٢ من ١ ينتج أن: أ ب = أ د

٤

جـ منتصف أ ب

ق (م أ ب) = ٢٠°

أوجد : ق (ب هـ د) ، ق (أ د ب)

الحل

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ Δ م أ ب متساوى الساقين ∴ ق(م ب أ) = ٢٠°

∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب ∴ ق(م جـ ب) = ٩٠°

في Δ م جـ ب : ق (جـ م ب) = ١٨٠ – (٩٠ + ٢٠) = ٧٠°

∵ ق (ب هـ د) = $\frac{١}{٢}$ ق (د م ب)

محيطية ومركزية مشتركتان فى أ ب

∴ ق (ب هـ د) = ٣٥° *المطلوب الأول*

فى Δ أ م ب: ق (أ م ب) = ١٨٠ – (٢٠ + ٢٠) = ١٤٠°

∴ ق (أ د ب) = ق (أ م ب) المركزية = ١٤٠°

٥

أ ب جـ د شكل رباعى فيه

أ ب = أ د

ق (أ ب̂ د) = ٣٠°، ق (جـ̂) = ٦٠°

اثبت أن: الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

الحل

∵ أ ب = أ د ∴ Δ أ ب د متساوى الساقين

∴ ق (أ د̂ ب) = ٣٠°

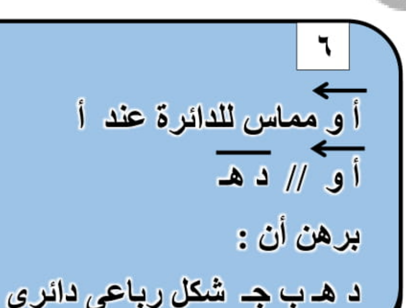
∴ ق (أ̂) = ١٨٠ – (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°

∴ ق (أ̂) + ق (جـ̂) = ١٢٠ + ٦٠ = ١٨٠°

وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٦



أ و مماس للدائرة عند أ

أ و // د هـ

برهن أن :

د هـ ب جـ شكل رباعى دائرى

الحل

∵ أ و // د هـ

∴ ق (و أ̂ ب) = ق (أ هـ̂ د) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (و أ̂ ب) المماسية = ق (جـ̂) المحيطية ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (أ هـ̂ د) = ق (جـ̂)

ونلاحظ أن أ هـ د زاوية خارجة ، جـ هي المقابلة للمجاورة

∴ الشكل د هـ ب جـ رباعى دائرى

٧

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

د ب مماس للدائرة عند ب

س ص // ب د

اثبت أن:

أ س ص جـ رباعى دائرى

الحل

∵ س ص // ب د

∴ ق (أ ب̂ د) = ق (ص س̂ ب) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (أ ب̂ د) المماسية = ق (جـ̂) المحيطية ⟵ (٢)

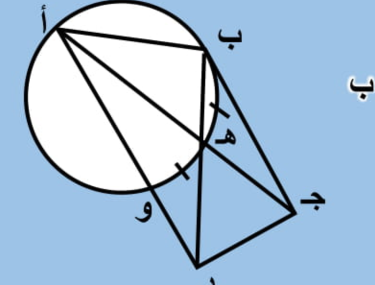
من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (ص س̂ ب) = ق (جـ̂)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى

٨



ب جـ مماس للدائرة عند ب

هـ منتصف ب و (القوس)

اثبت أن :

أ ب جـ د رباعى دائرى

الحل

∵ ق (ب هـ⌒) = ق (هـ و⌒)

∴ ق (ب أ̂ هـ) = ق (هـ أ̂ و) ⟵ (١)

∵ ق (ب أ̂ هـ) المحيطية = ق (جـ ب̂ هـ) المماسية ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (جـ ب̂ هـ) = ق (هـ أ̂ و)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى جـ د وفى جهة واحدة منها

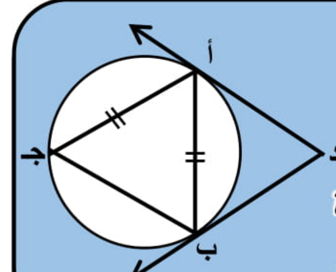
∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٩

د أ ، د ب مماسين

أ ب = أ جـ

اثبت أن : أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د



الحل

في Δ أ ب جـ : ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب) ⟵ (١)

في Δ أ ب د : ∵ د أ = د ب لأنهما قطعتان مماستان

∴ ق (د أ̂ ب) = ق (د ب̂ أ) ⟵ (٢)

∵ ق (د أ̂ ب) المماسية = ق (أ جـ̂ ب) المحيطية ⟵ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ وبمقارنة المثلثين ينتج أن :

ق (ب أ̂ جـ) = ق (د̂)

∴ أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د

١٠

Δ أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة م وتمس أضلاعه أب ، أجـ ، ب جـ في د ، هـ ، و على الترتيب

أد= ٥سم ، ب هـ = ٤ سم ،جـ و= ٣سم

أوجد محيط Δ أ ب جـ

الحل

∵ أ د ، أ و قطعتان مماستان ∴ أ د = أ و = ٥سم

∵ ب د ، ب هـ قطعتان مماستان ∴ ب د = ب هـ = ٤ سم

∵ جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان ∴جـ هـ = جـ و = ٣سم

∴ أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، أ جـ = ٥ + ٣ = ٨ سم

ب جـ = ٤ + ٣ = ٧ سم

∴ محيط Δ أ ب جـ = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم

١١

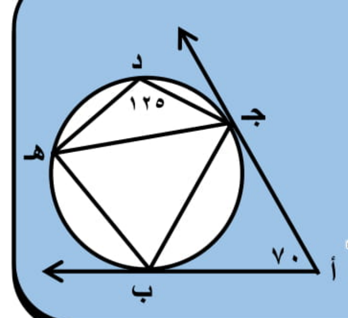
أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة

ق (أ̂) = ٧٠°

ق (جـ د̂ هـ) = ١٢٥°

اثبت أن : ١- جـ ب = جـ هـ

٢- أ جـ // ب هـ



الحل

∵ الشكل د جـ ب هـ رباعى دائرى

∴ ق (جـ ب̂ هـ) = ١٨٠ _ ١٢٥ = ٥٥° ⟵ (١)

∵ أ جـ ، أ ب قطعتان مماستان

$$∴ ق (أ جـ̂ ب) = ق (أ ب̂ جـ) = \frac{١٨٠ - ٧٠}{٢} = ٥٥°$$

∵ ق (ب هـ̂ جـ) المحيطية = ق (أ جـ̂ ب) المماسية = ٥٥° ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق(جـ ب̂ هـ) = ق(ب هـ̂ جـ)

∴ Δ جـ ب هـ متساوى الساقين ∴ جـ ب = جـ هـ أولا

∵ ق (أ جـ̂ ب) = ق (جـ ب̂ هـ) = ٥٥°

وهما متبادلتان ∴ أ جـ // ب هـ

١٢

دائرتان متماستان من الداخل فى ب

أ ب مماس مشترك للدائرتين

أجـ مماس للصغرى، أب مماس للكبرى

أ جـ = ١٥ سم ، أب = (٢س-٣) سم

أ د = (ص-٢) سم أوجد قيمة س ، ص

الحل

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان للدائرة الصغرى

∴ أ ب = ١٥ ∴ ٢س – ٣ = ١٥ ٢س = ١٨

∴ س = ٩

∵ أ ب = أ د قطعتان مماستان للدائرة الكبرى

∴ أ د = ١٥ ∴ ص - ٢ = ١٥

∴ ص = ١٧